Fachbereich Mathematik
PD Dr. R. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 15./16.12.2008

Analysis III
Gewöhnliche Differentialgleichungen
5. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten)

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die folgenden Differentialgleichungssysteme:

1. $$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + y_2(t), \\ y_2'(t) &= y_2(t), \\ y_3'(t) &= 2y_3(t), \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) - y_2(t), \\ y_2'(t) &= 4y_1(t) - 3y_2(t). \end{aligned}$$

(b) Ist die Nulllösung jeweils (asymptotisch) stabil?

(G 2) (Phasenbild)

Skizzieren Sie das Phasenbild des Systems aus Aufgabe (G 1)(a)2.

(G 3) (Operatorhalbgruppen im $\mathbb{R}^n$)

Eine stetige Abbildung $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ für die

1. $T(0) = Id$ und
2. $T(s + t) = T(s) \cdot T(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$

gilt, wird stetige Operatorhalbgruppe genannt. Zeigen Sie, dass für jede stetige Operatorhalbgruppe $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ein eindeutig bestimmtes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ existiert mit

$$T(t) = e^{tA} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

(i) Zeigen Sie, dass $\int_0^\varepsilon T(s)ds$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ invertierbar ist. Zeigen Sie hierfür, dass $(Id - B)$ für $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|B\| < 1$ stets invertierbar ist mit der Inversen $\sum_{k=0}^\infty B^k$.

(ii) Betrachten Sie $\frac{T(h)-Id}{h} \int_0^\varepsilon T(t)dt$, um die Differenzierbarkeit von T in 0 zu zeigen.

(iii) Zeigen Sie, dass T differenzierbar ist und eine geeignete Differentialgleichung erfüllt.

Hausübungen

(H 1) (Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zu dem folgenden System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + 2z \\ y' &= x + 2z \\ z' &= -2x + y - z \end{aligned}$$

(H 2)

Entscheiden Sie, ob die Lösungen $y_0 \equiv 0$ und $y_1 \equiv 1$ der Differentialgleichung $y' = -y(1-y)$ stabil oder instabil sind.

(H 3)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, so dass $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$ für alle Eigenwerte λ von A gilt. Zeigen Sie: Es gibt Untervektorräume U_s und U_i von $\mathbb{C}^n$ mit $U_s \oplus U_i = \mathbb{C}^n$, so dass $\mathrm{e}^{tA}x_s \to 0$ für $t \to \infty$, falls $x_s \in U_s$ und $\|\mathrm{e}^{tA}x_i\| \to \infty$, falls $x_i \in U_i \setminus \{0\}$ gilt.

(*) (Zusatzaufgabe ohne Wertung) Zeigen Sie, dass $\{A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) : \sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset\}$ offen und dicht in $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ ist.