Fachbereich Mathematik
PD Dr. R. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 1./2.12.2009

Analysis III
Gewöhnliche Differentialgleichungen

4. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Reduktionsverfahren von d'Alembert)

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$$

eine stetige Abbildung. Die Differentialgleichung $y'(t) = A(t)y(t)$ besitze die spezielle Lösung $\phi = \binom{\phi_1}{\phi_2} : I \to \mathbb{R}^2$. Im Teilintervall $J \subseteq I$ gelte $\phi_1(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Zeigen Sie: Man erhält eine zweite Lösung $\psi : J \to \mathbb{R}^2$ durch den Ansatz

$$\psi(t) = u(t)\begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix},$$

wobei $u, g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, die den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$g' = \left(a_{22} - a_{12}\frac{\phi_2}{\phi_1}\right) g, \quad u' = \frac{a_{12}}{\phi_1} g.$$

(b) Nun betrachten wir für $t > 0$ das folgende homogene Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} y_1' = \frac{1}{t} y_1 - y_2 \\ \\ y_2' = \frac{1}{t^2} y_1 + \frac{2}{t} y_2 \end{cases}$$

Schreiben Sie dieses System in Matrix-Form und geben Sie ein Fundamentalsystem an. Verwenden Sie dabei die Methode aus Teil (a).

LÖSUNG: (a) Es gilt auf dem Intervall J:

$$\begin{aligned}
\psi' &= \begin{pmatrix} u\phi_1 \\ u\phi_2 + g \end{pmatrix}' \\
&= \begin{pmatrix} u'\phi_1 + u\phi_1' \\ u'\phi_2 + u\phi_2' + g' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{a_{12}}{\phi_1} g\phi_1 + u(a_{11}\phi_1 + a_{12}\phi_2) \\ \frac{a_{12}g}{\phi_2} + u(a_{21}\phi_1 + a_{22}\phi_2) + (a_{22} - a_{12}\frac{\phi_2}{\phi_1})g \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}u\phi_1 + a_{12}(u\phi_2 + g) \\ a_{21}u\phi_1 + a_{22}(u\phi_2 + g) \end{pmatrix} \\
&= A\psi.
\end{aligned}$$

(b) Mit $y := \binom{y_1}{y_2}$ kann man das System in die Form $y'(t) = A(t)y(t)$ bringen, wobei

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}$$

ist. Durch "scharfes" Hinsehen bekommt man als erste Lösung z.B. $\phi(t) = \binom{t^2}{-t}$ (Probe machen!).
Die beiden Differentialgleichungen aus Teil (a) lauten angewendet auf diesen Fall:

$$g' = (\frac{2}{t} - 1\frac{t}{t^2})g = \frac{1}{t}g \quad \text{und} \quad u' = -\frac{1}{t^2}g.$$

Also ist zum Beispiel $g = t$ eine Lösung von $g' = \frac{1}{t}g$. Die zweite Differentialgleichung $u' = \frac{1}{t}$ wird durch $u(t) := \ln t$ gelöst. Jetzt kann die Formel aus der (a) benutzt werden, und man erhält eine zweite Lösung ψ für $y'(t) = A(t)y(t)$:

$$\psi(t) := u(t)\begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \ln t \\ t \ln t + t \end{pmatrix}.$$

Die Wronski-Matrix ist gegeben durch

$$Z(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln t \\ -t & t + t\ln t \end{pmatrix}.$$

Da $\det Z(1) = 1 \neq 0$ gilt, ist Z sogar eine Fundamentalmatrix und $\{\phi, \psi\}$ ein Fundamentalsystem.

(G 2)

(a) Es sei $A : [0, \infty) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ stetig mit spur $A(t) \leq -\frac{1}{t+1}$ für $t \in [0, \infty)$, und sei Z ein Fundamentalsystem von $y'(t) = A(t)y(t)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{t \to \infty} \det Z(t) = 0$$

gilt.

(b) Es sei $A : [0, T] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ stetig und X bzw. Y seien Fundamentalsysteme von $x'(t) = A(t)x(t)$ bzw. $y'(t) = -A^{\mathrm{T}}(t)y(t)$ mit $X(0) = Y(0) = Id$. Zeigen Sie, dass dann

$$X(t) = (Y^{\mathrm{T}}(t))^{-1}, \qquad t \in [0, T],$$

gilt.

LÖSUNG: (a) Nach dem Satz von Liouville (Kapitel III, Satz 1.6) gilt

$$\begin{aligned} \det Z(t) &= \det Z(0) \, \exp\left(\int_0^t \text{spur } A(s) \, ds\right) \leq \det Z(0) \, \exp\left(\int_0^t -\frac{1}{s+1} \, ds\right) \\ &\leq \det Z(0) \, \exp\left(-\ln(t+1)\right) \leq \det Z(0) \, \frac{1}{t+1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\det Z(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

(b) Da Y ein Fundamentalsystem ist, gilt nach Kapitel III, Bemerkung 1.5, dass $Y'(t) = -A^{\mathrm{T}}(t)Y(t)$ ist. Somit erhalten wir

$$\left[(Y^{\mathrm{T}}(t))^{-1}\right]' = -(Y^{\mathrm{T}}(t))^{-1}(Y^{\mathrm{T}}(t))'(Y^{\mathrm{T}}(t))^{-1} = (Y^{\mathrm{T}}(t))^{-1}(A^{\mathrm{T}}(t)Y(t))^{\mathrm{T}}(Y^{\mathrm{T}}(t))^{-1} = A(t)(Y^{\mathrm{T}}(t))^{-1}.$$

Somit ist $(Y^{\mathrm{T}}(t))^{-1}$ eine Lösung der Gleichung $Z'(t) = A(t)Z(t)$. Da aber X ein Fundamentalsystem für das System $x'(t) = A(t)x(t)$ ist, folgt dass X ebenfalls eine Lösung dieser Gleichung ist (vgl. Kapitel III, Bemerkung 1.5). Da $X(0) = Y(0) = (Y^{\mathrm{T}}(0))^{-1} = Id$, folgt auf Grund der Eindeutigkeit (beachte hier, dass man die Differentialgleichung $Z'(t) = A(t)Z(t)$ komponentenweise auffasst), dass $X(t) = (Y^{\mathrm{T}}(t))^{-1}$ gilt.

(G 3)

Es seien A, B zwei $n \times n$ Matritzen über $\mathbb{C}$. In der Vorlesung wurde die Matrix-Exponential-Funktion $e^{tA} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ definiert. Insbesondere gilt also $e^{0A} := Id$. Beweisen Sie nun die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ falls $AB = BA$ gilt.

(b) $e^{(s+t)A} = e^{sA} \cdot e^{tA}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$,

(c) $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA}$.

(d) $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(e) $e^{t \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n})$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(f) $e^{tA + \lambda Id} = e^{\lambda} e^{tA}$ für $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

(g) Aus $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, folgt $AB = BA$.

LÖSUNG: (a) Gilt $AB = BA$, so ist

$$(A+B)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} A^k B^{j-k},$$

und mit dem Cauchy-Produkt erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{t(A+B)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}(A+B)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} A^k B^{j-k} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{t^k\, A^k}{k!} \frac{t^{j-k}\, B^{j-k}}{(j-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\, A^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m\, B^m}{m!} = e^{tA} e^{tB}. \end{aligned}$$

(b) Diese Aussage folgt direkt aus (a).

(c) Um diese Aussage zu beweisen beachten wir, dass aus (b) für alle $t, h \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA} - Id}{h} \cdot e^{tA}$$

folgt. Es bleibt also nur noch $\lim_{h \to 0} \frac{e^{hA} - Id}{h} = A$ zu zeigen. Dies folgt allerdings aus

$$\left\| \frac{e^{hA} - Id}{h} - A \right\| \leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{|h|^{j-1} \cdot \|A\|^j}{j!} = \frac{e^{|h| \cdot \|A\|} - 1}{h} - \|A\| \to 0$$

für $h \to 0$ (beachte, dass wir hier eine bekannte Eigenschaft der reelwertigen Exponentialfunktion ausgenutzt haben).

(d) Nach (a) ist $e^A e^{-A} = I$. Also ist e^A invertierbar und $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(e) Aus LA ist bekannt (oder man zeigt es induktiv), dass $(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))^j = \mathrm{diag}(\lambda_1^j, \ldots, \lambda_n^j)$. Daraus folgt nun die Aussage.

(f) Beachte, dass die Matritzen tA und λId kommutieren. Also folgt aus (a) und (e)

$$e^{tA + \lambda Id} = e^{\lambda Id} e^{tA} = \mathrm{diag}(e^{\lambda}, \ldots, e^{\lambda}) e^{tA} = e^{\lambda} e^{tA}.$$

(g) Es sei $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir leiten zweimal an der Stelle $t = 0$ ab und erhalten

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{t(A+B)} \Big|_{t=0} = (A+B)^2,$$

und

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(e^{tA} e^{tB}\right) \Big|_{t=0} = A^2 + 2AB + B^2.$$

Somit folgt $AB = BA$.