**Fachbereich Mathematik**
PD Dr. R. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 1./2.12.2009

# Analysis III
# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 4. Übung

### Gruppenübungen

**(G 1) (Reduktionsverfahren von d'Alembert)**

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$$

eine stetige Abbildung. Die Differentialgleichung $y'(t) = A(t)y(t)$ besitze die spezielle Lösung $\phi = \binom{\phi_1}{\phi_2} : I \to \mathbb{R}^2$. Im Teilintervall $J \subseteq I$ gelte $\phi_1(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Zeigen Sie: Man erhält eine zweite Lösung $\psi : J \to \mathbb{R}^2$ durch den Ansatz

$$\psi(t) = u(t)\begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix},$$

wobei $u, g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, die den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$g' = \left(a_{22} - a_{12}\frac{\phi_2}{\phi_1}\right) g, \quad u' = \frac{a_{12}}{\phi_1} g.$$

(b) Nun betrachten wir für $t > 0$ das folgende homogene Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} y_1' = \frac{1}{t} y_1 - y_2 \\ \\ y_2' = \frac{1}{t^2} y_1 + \frac{2}{t} y_2 \end{cases}$$

Schreiben Sie dieses System in Matrix-Form und geben Sie ein Fundamentalsystem an. Verwenden Sie dabei die Methode aus Teil (a).

**(G 2)**

(a) Es sei $A : [0, \infty) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ stetig mit spur $A(t) \leq -\frac{1}{t+1}$ für $t \in [0, \infty)$, und sei $Z$ ein Fundamentalsystem von $y'(t) = A(t)y(t)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{t \to \infty} \det Z(t) = 0$$

gilt.

(b) Es sei $A : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ stetig und $X$ bzw. $Y$ seien Fundamentalsysteme von $x'(t) = A(t)x(t)$ bzw. $y'(t) = -A^{\mathrm{T}}(t)y(t)$ mit $X(0) = Y(0) = Id$. Zeigen Sie, dass dann

$$X(t) = (Y^{\mathrm{T}}(t))^{-1}, \qquad t \in [0,T],$$

gilt.

**(G 3)**

Es seien $A, B$ zwei $n \times n$ Matritzen über $\mathbb{C}$. In der Vorlesung wurde die Matrix-Exponential-Funktion $e^{tA} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ definiert. Insbesondere gilt also $e^{0A} := Id$. Beweisen Sie nun die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ falls $AB = BA$ gilt.

(b) $e^{(s+t)A} = e^{sA} \cdot e^{tA}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$,

(c) $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA}$.

(d) $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(e) $e^{t \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n})$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(f) $e^{tA + \lambda Id} = e^{\lambda} e^{tA}$ für $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

(g) Aus $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, folgt $AB = BA$.

## Hausübungen

**(H 1) (6 Punkte)**

(a) Entscheiden Sie, ob die Funktionen $f, g, h$ linear unabhängig sind.

1. $f(x) = \sin^2 x - \sin x$, $g(x) = -1 + \sin x$, $h(x) = \cos^2 x$.
2. $f(x) = (x^3, x^2, x)^T$, $g(x) = (\sin^3 x, \sin x, 0)^T$, $h(x) = e^x(1,1,1)^T$

(b) Berechnen Sie für die Funktionen $f, g, h$ aus (a) 2. die Wronski Determinante

$$\det \begin{pmatrix} f & g & h \end{pmatrix}$$

an der Stelle $x = 0$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrem Ergebnis in (a). Ist das ein Widerspruch zu Bemerkung III.1.5 des Skripts?

**(H 2) (6 Punkte)**

Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe (G 1) ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x' &= (3t-1)x + (t-1)y \\ y' &= -(t+2)x + (t-2)y \end{aligned}$$

*Hinweis:* Eine Lösung des Systems ist von der Form $(\phi(t), -\phi(t))$.

**(H 3)**

Bestimmen Sie alle Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} x' &= (3t-1)x + (t-1)y + t\mathrm{e}^{t^2} \\ y' &= -(t+2)x + (t-2)y - \mathrm{e}^{t^2} \end{aligned}$$

*Hinweis:* Eine Lösung des homogenen Systems ist von der Form $(\phi(t), -\phi(t))$, eine andere ist gegeben durch $((\frac{2}{9} - \frac{1}{3}t)\mathrm{e}^{-3t+t^2}, (\frac{7}{9} + \frac{1}{3}t)\mathrm{e}^{-3t+t^2})$.