Fachbereich Mathematik
PD Dr. R. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

Wintersemester 09/10
17./18.11.2009

Analysis III
Gewöhnliche Differentialgleichungen

3. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $M > 0$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{F}_1 = \{f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) : |f'(x)| \le M \text{ für alle } x \in [a,b]\}$$

gleichgradig stetig ist.

(b) Welche der folgenden Teilmengen von $C([0,1],\mathbb{R})$ sind gleichgradig stetig? Welche sind relativ kompakt?

$$\mathcal{F}_2 = \{f : f(x) = x^\alpha, 1 \le \alpha < 2\}$$
$$\mathcal{F}_3 = \{f : f(x) = x^\alpha, 0 < \alpha < \infty\}$$
$$\mathcal{F}_4 = \{f : f(x) = n\cos\left(\frac{1}{n}x\right), n \in \mathbb{N}\}$$

LÖSUNG: (a) Da für jedes $f \in \mathcal{F}_1$ die Ableitung durch $M > 0$ beschränkt ist, folgt aus dem Mittelwertsatz, dass $|f(x) - f(y)| \le M|x-y|$ für alle $x, y \in [a,b]$, d.h. jedes $f \in \mathcal{F}_1$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = M$. Für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$ können wir also $\delta = \varepsilon/L$ wählen und erhalten $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $|x-y| < \delta$ und alle $f \in \mathcal{F}_1$. Somit ist $\mathcal{F}_1$ gleichgradig stetig.

(b)

1. Für jedes $f \in \mathcal{F}_2$ gilt $|f(t)| = |t^\alpha| \le 1$ für $t \in [0,1]$ und $1 \le \alpha < 2$. Somit ist $\mathcal{F}_2$ gleichmäßig beschränkt. Außerdem gilt für jedes $f \in \mathcal{F}_2$, dass $|f'(t)| = |\alpha t^{\alpha-1}| \le 2$ für $t \in [0,1]$ und $1 \le \alpha < 2$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist jedes $f \in \mathcal{F}_2$ Lipschitz-stetig auf $[0,1]$ mit Lipschitzkonstante $L = 2$. Somit ist $\mathcal{F}_2$ gleichgradig stetig. Nach Arzelà-Ascoli ist $\mathcal{F}_2$ relativ kompakt.
2. Betrachte die Funktionenfolge $(f_n)_n \subset \mathcal{F}_3$ definiert durch $f_n(t) = t^n$. Jede Teilfogle von $(f_n)_n$ konvergiert punktweise gegen die unstetige Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \in [0,1), \\ 1, & \text{falls } t = 1. \end{cases}$$

Somit besitzt $(f_n)_n$ keine gleichmäßig konvergente Teilfolge, d.h. $\mathcal{F}_3$ ist nicht relativ kompakt. Da $\mathcal{F}_3$ gleichmäßig beschränkt ist (zeigt man analog zu 1.), folgt aus Arzelà-Ascoli, dass $\mathcal{F}_3$ nicht gleichgradig stetig ist.

3. Für jedes $f \in \mathcal{F}_4$ gilt $|f'(t)| = |-\sin\left(\frac{1}{n}t\right)| \le 1$ für $t \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist jedes $f \in \mathcal{F}_4$ Lipschitz-stetig auf $[0,1]$ mit Lipschitzkonstante $L = 1$. Somit ist $\mathcal{F}_4$ gleichgradig stetig. Allerdings ist $\mathcal{F}_4$ nicht gleichmäßig beschränkt, da $f_n(0) := n\cos\left(\frac{1}{n}0\right) \to \infty$ für $n \to \infty$. Somit ist $\mathcal{F}_4$ nicht relativ kompakt.

(G 2)

Es sei $D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 < 1\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t, y) = \sin\left(\frac{1}{1 - (t^2 + y^2)}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y' = f(t, y), y(0) = 0$ eindeutig lösbar ist.

(b) Es sei $u : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems aus Teil (a). Zeigen Sie:

1. $-t_- = t_+$;
2. $\lim_{t \nearrow t_+} u(t)$ existiert;
3. $\lim_{t \nearrow t_+} t^2 + u^2(t) = 1$.

LÖSUNG: (a) Die Funtion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig und

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \cos\left(\frac{1}{1 - (t^2 + y^2)}\right) \frac{1}{(1 - (t^2 + y^2))^2}.$$

Für $0 < \lambda < 1$ definieren wir $D_\lambda := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 \leq \lambda\}$. Für alle $(t, y) \in D_\lambda$ gilt nun

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right| \leq \frac{1}{(1 - \lambda)^2}.$$

Nach dem Mittelwertsatz genügt f auf D_λ einer Lipschitzbedingung. Da für jeden Punkt $(t, y) \in D$ ein $0 < \lambda < 1$ existiert mit $(t, y) \in D_\lambda$, folgt dass f einer lokalen Lipschitzbedingung auf D genügt. Der lokale Satz von Picard Lindelöf garantiert nun die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(t, y), y(0) = 0$ auf einer Umgebung U von $(0, 0)$.

(b)

1. Es sei $u : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems aus Teil (a). Es ist klar, dass $-1 \leq t_- < 0 < t_+ \leq 1$ gilt. Wir nehmen nun an, dass: $-t_+ < t_-$ (der Fall $-t_+ > t_-$ geht analog).
   Für $t \in (-t_+, -t_-)$ ist $z(t) := -u(-t)$ eine Lösung des AWP aus Teil (a), da f eine gerade Funktion ist. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung muss $z(t) = u(t)$ für alle $t \in (t_-, -t_-)$ gelten. Nun ist aber die Funtktion $\tilde{u} : (-t_+, t_+) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

   $$\tilde{u}(t) = \begin{cases} -u(-t), & t \in (-t_+, t_-], \\ u(t), & t \in (t_-, t_+) \end{cases}$$

   ebenfalls eine Lösung des AWP, die u nach links fortsetzt. Dies widerspricht der Maximalität von u. Also muss $-t_+ = t_-$ gelten.
2. Da $|f(t, y)| \leq 1$ für alle $(t, y) \in D$, folgt aus dem Mittelwertsatz, dass $u : (-t_+, t_+) \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und somit insbesondere gleichmäßig stetig ist. Also existiert $\alpha := \lim_{t \nearrow t_+} u(t)$.
3. Beachte, dass $\lim_{t \nearrow t_+} t^2 + u^2(t) = t_+^2 + \alpha^2$. Wir nehmen an, dass $t_+^2 + \alpha^2 < 1$, d.h. der Punkt (t_+, α) liegt im Inneren von $\overline{D}$. Dann exisitiert eine Lösung $v : [t_+, t_+ + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems $y' = f(t, y),\ y(t_+) = \alpha$. Nun ist aber

   $$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in (-t_+, t_+], \\ v(t), & t \in [t_+, t_+ + \varepsilon) \end{cases}$$

   eine Fortsetzung der Lösung u nach rechts, was aber ein Widerspruch zur Maximalität ist. Somit ist $t_+^2 + \alpha^2 = 1$, d.h $(t_+, \alpha) \in \partial D$.

(G 3)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine stetige Abbildung, die lokal einer Lipschitzbedingung genügt. Zeigen Sie: Für eine maximale Lösung

$$u : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}, \quad \text{von} \quad y' = f(t, y)$$

gilt $t_+ = \infty$ oder $\lim_{t \to t_+} |u(t)| = +\infty$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitzbedingung genügt und sei $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$y'(t) = f(y),\ y(t_0) = y_0 \text{ hat eine Lösung auf } [t_0, \infty) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{f(\xi)}\, d\xi = \infty.$$

Bemerkung: Die Aussage in Teil (a) gilt auch für Funktionen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Vergleichen Sie die Aussage in Teil (a) mit (G2) (b).

LÖSUNG: (a) Sei $t_+ < \infty$. Annahme: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $u'(t)$ beschränkt ist auf $[t_+ - \varepsilon, t_+)$. Dann ist u nach dem Mittelwertsatz Lipschitz-stetig, also insbesondere gleichmäßig stetig auf $[t_+ - \varepsilon, t_+)$. Wir können also u stetig nach t_+ fortsetzen. Hieraus folgt

$$u'(t) = f(t, u(t)) \xrightarrow{t \to t_+} f(t_+, u(t_+)).$$

Somit ist u auch in t_+ differenzierbar mit $u'(t_+) = f(t_+, u(t_+))$. Nach dem lokalen Existenzsatz von Picard Lindelöf (Kapitel II, Theorem 1.8) gibt es ein $\delta > 0$ und ein $w : (t_+ - \delta, t_+ + \delta) \to \mathbb{R}^n$ mit $w' = f(t, w)$ und $w(t_+) = u(t_+)$. Nach dem Eindeutigkeitssatz (Kapitel II, Satz 1.6) stimmt diese Lösung auf $(t_+ - \delta, t_+]$ mit u überein. Es folgt, dass

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{für } t \in (t_-, t_+) \\ w(t) & \text{für } t \in [t_+, t_+ + \delta) \end{cases}$$

eine Lösung der DGL ist, die u fortsetzt. Widerspruch zur Maximalität von u. Somit ist $u'(t)$ unbeschränkt auf $[t_+ - \varepsilon, t_+)$. Nach der Voraussetzung an f ist u streng monoton wachsend, und somit folgt aus der Unbeschränktheit von u', dass $\lim_{t \to t_+} |u(t)| = +\infty$.

(b) "$\Rightarrow$" Sei u eine Lösung von $y' = f(y)$, $y(t_0) = y_0$ auf $[t_0, \infty)$. Wegen $u' = f(u)$ ist u streng monoton wachsend. Es gilt

$$\infty \xleftarrow{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} 1 ds = \int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{f(u(s))} ds = \int_{y_0}^{u(t)} \frac{1}{f(\tau)} d\tau \le \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{f(\tau)} d\tau.$$

"$\Leftarrow$" Da f Lipschitz-stetig ist, existiert genau eine maximale Lösung u von $y' = f(y)$ mit $y(t_0) = y_0$ (Kapitel II, Satz 1.10). Ausserdem erfüllt f die Voraussetzungen von Teil (a). Somit gilt für das Existenzintervall (t_-, t_+) entweder $t_+ = \infty$ oder $\lim_{t \to t_+} |u(t)| = \infty$. Angenommen $t_+ \neq \infty$. Da u wie oben streng monoton wachsend ist, muss gelten $\lim_{t \to t_+} u(t) = \infty$. Es folgt

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds = \lim_{t \to t_+} \int_{y_0}^{u(t)} \frac{1}{f(s)} ds = \lim_{t \to t_+} \int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{f(u(s))} ds = \lim_{t \to t_+} \int_{t_0}^{t} 1 ds = \infty.$$

Widerspruch. Somit gilt $t_+ = \infty$.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

(a) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

Bestimmen Sie das größte Intervall, in dem die Existenz der Lösung durch Satz 1.11 der Vorlesung garantiert werden kann.

Hinweis: Betrachten Sie das Rechteck $R = \{(t, y) : 0 \le t \le a,\ |y| \le b\}$ und bestimmen Sie das Existenzintervall gemäß Satz 1.11.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = \mathrm{e}^{-t^2} + y^3, \quad y(0) = 1$$

eine Lösung auf $[0, \frac{1}{9}]$ besitzt und dass $0 \le y(t) \le 2$ für $t \in [0, \frac{1}{9}]$ gilt.

LÖSUNG: (a) Es gilt $M = \max_{(t,y)\in R} 1 + y^2 = 1 + b^2$, also existiert die Lösung für $0 \le t \le \alpha = \min(a, \frac{b}{1+b^2})$.

Wir bestimmen nun das b, so dass α maximal wird. Dies ist der Fall für $b = 1$ und es gilt $\alpha = \frac{1}{2}$. Also existiert, falls wir $a > \frac{1}{2}$ wählen, die Lösung für $t \in [0, \frac{1}{2}]$.

*B*emerkung: Die Lösung ist $y(t) = \tan t$ und diese existiert für $t \in [0, \frac{\pi}{2})$. Dies zeigt, dass Satz 1.11 nicht das optimale Intervall liefert.

(b) Es sei $R = [0, 1/9] \times [0, 2]$. Wir berechnen

$$M = \max_{(t,y)\in R} \mathrm{e}^{-t^2} + y^3 = 1 + 2^3 = 9.$$

Damit existiert die Lösung für $0 \le t \le \min(1/9, 1/9) = 1/9$ und in diesem Intervall gilt $y \in [0, 2]$.

(H 2) (6 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt und $u_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Lösungen von $y' = f(y)$. Zeigen Sie: Ist $(u_k(0))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, so konvergiert eine Teilfolge von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Lösung u von $y' = f(y)$.

LÖSUNG: Wir zeigen, dass $M = \{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig ist.

Es gilt

$$u_k(t) = u_k(0) + \int_0^t f(u_k(s))\mathrm{d}s$$

und damit folgt

$$|u_k(t) - u_k(s)| = |\int_s^t f(u_k(s))\mathrm{d}s| \le K|t - s|$$

mit $K = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Dies zeigt die gleichgradige Stetigkeit.

Weiter gilt

$$|u_k(t)| \le |u_k(0)| + \int_0^t |f(u_k(s))|\mathrm{d}s \le |u_k(0)| + K$$

und damit ist, falls $u_k(0)$ konvergiert, der Satz von Arzela/Ascoli anwendbar. Dieser liefert eine gleichmäsig konvergente Teilfolge der u_k mit Grenzwert u. Für diesen gilt

$$u(t) = \lim_{k\to\infty} u_k(t) = \lim_{k\to\infty} \left(u_k(0) + \int_0^t f(u_k(s))\mathrm{d}s \right) = u(0) + \int_0^t f(u(s))\mathrm{d}s,$$

also löst u die DGL.

(H 3) (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $M \subset C([a,b])$ kompakt, so ist M beschränkt und gleichgradig stetig.

Hinweis: Betrachten Sie eine Überdeckung von M durch ε-Kugeln.

(b) Ist die Menge

$$M := \{f_t \in C([0,1]) : f_t(x) = \sin(x+t),\ t \in \mathbb{R}\}$$

gleichgradig stetig? Ist sie kompakt?

LÖSUNG: (a) Aus den Analysis Vorlesungen ist bekannt, dass kompakte Teilmengen normierter Räume beschränkt sind. Es genügt also, die gleichgradige Stetigkeit zu untersuchen.

Zu $\varepsilon > 0$ sei $\mathcal{B} = \{B(f, \varepsilon/3) : f \in M\}$ eine offene Überdeckung von M mit $\varepsilon/3$-Kugeln. Da M kompakt ist, gibt es $f_1, \ldots, f_n \in M$ mit $M \subset \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \varepsilon/3)$. Weiter gibt es wegen der Stetigkeit der Funktionen f_i für $i = 1, \ldots, n$ Konstanten δ_i mit

$$|x-y| \leq \delta_i \quad \Rightarrow \quad |f_i(x) - f_i(y)| \leq \varepsilon/3.$$

Wir setzen nun $\delta = \min_{i=1,\ldots,n}(\delta_i)$. Dann gilt für $|x-y| \leq \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

da $f \in B(f_i, \varepsilon/3)$. Dies zeigt, dass M gleichgradig stetig ist.

(b) Es gilt $f_t'(x) = \cos(x+t)$, also $|f_t'(x)| \leq 1$, also ist M wegen Aufgabe (G1)(a) gleichgradig stetig. Da M offensichtlich auch beschränkt ist, folgt mit dem Satz von Arzela und Ascoli die relative Kompaktheit.

M ist abgeschlossen: Sei $f_n = f_{t_n} \to f$ eine in $C([0,1])$ konvergente Folge aus M. Offensichtlich gilt wegen der Periodizität der Sinusfunktion $M = \{f_t \in C([0,1]) : f_t(x) = \sin(x+t),\ t \in [0, 2\pi]\}$ und damit o.B.d.A $t_n \in [0, 2\pi]$. Da das Intervall $[0, 2\pi]$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge der (t_n) mit $t_{n_k} \to t_0 \in [0, 2\pi]$. Dies ergibt schließlich $f_{n_k} \to \sin(x+t_0)$, also $f = \sin(x+t_0) \in M$.

Damit folgt $\overline{M} = M$ und daher ist M kompakt.