Fachbereich Mathematik
PD Dr. R. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 17./18.11.2009

Analysis III
Gewöhnliche Differentialgleichungen

3. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $M > 0$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{F}_1 = \{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) : |f'(x)| \leq M \text{ für alle } x \in [a, b]\}$$

gleichgradig stetig ist.

(b) Welche der folgenden Teilmengen von $C([0, 1], \mathbb{R})$ sind gleichgradig stetig? Welche sind relativ kompakt?

$$\mathcal{F}_2 = \{f : f(x) = x^\alpha, 1 \leq \alpha < 2\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \{f : f(x) = x^\alpha, 0 < \alpha < \infty\}$$

$$\mathcal{F}_4 = \{f : f(x) = n \cos\left(\frac{1}{n}x\right), n \in \mathbb{N}\}$$

(G 2)

Es sei $D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 < 1\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t, y) = \sin\left(\frac{1}{1 - (t^2 + y^2)}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y' = f(t, y), y(0) = 0$ eindeutig lösbar ist.

(b) Es sei $u : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems aus Teil (a). Zeigen Sie:

1. $-t_- = t_+$;
2. $\lim_{t \nearrow t_+} u(t)$ existiert;
3. $\lim_{t \nearrow t_+} t^2 + u^2(t) = 1$.

(G 3)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine stetige Abbildung, die lokal einer Lipschitzbedingung genügt. Zeigen Sie: Für eine maximale Lösung

$$u : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}, \quad \text{von} \quad y' = f(t, y)$$

gilt $t_+ = \infty$ oder $\lim_{t \to t_+} |u(t)| = +\infty$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitzbedingung genügt und sei $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$y'(t) = f(y),\ y(t_0) = y_0 \text{ hat eine Lösung auf } [t_0,\infty) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{f(\xi)}\, d\xi = \infty.$$

Bemerkung: Die Aussage in Teil (a) gilt auch für Funktionen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Vergleichen Sie die Aussage in Teil (a) mit (G2) (b).

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

(a) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

Bestimmen Sie das größte Intervall, in dem die Existenz der Lösung durch Satz 1.11 der Vorlesung garantiert werden kann.

Hinweis: Betrachten Sie das Rechteck $R = \{(t,y) : 0 \leq t \leq a,\ |y| \leq b\}$ und bestimmen Sie das Existenzintervall gemäß Satz 1.11.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = \mathrm{e}^{-t^2} + y^3, \quad y(0) = 1$$

eine Lösung auf $[0, \frac{1}{9}]$ besitzt und dass $0 \leq y(t) \leq 2$ für $t \in [0, \frac{1}{9}]$ gilt.

(H 2) (6 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt und $u_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Lösungen von $y' = f(y)$. Zeigen Sie: Ist $(u_k(0))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, so konvergiert eine Teilfolge von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Lösung u von $y' = f(y)$.

(H 3) (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $M \subset C([a,b])$ kompakt, so ist M beschränkt und gleichgradig stetig.

Hinweis: Betrachten Sie eine Überdeckung von M durch ε-Kugeln.

(b) Ist die Menge

$$M := \{f_t \in C([0,1]) : f_t(x) = \sin(x+t),\ t \in \mathbb{R}\}$$

gleichgradig stetig? Ist sie kompakt?