Fachbereich Mathematik
PD Dr. R. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

Wintersemester 09/10
3./4.11.2009

Analysis III
Gewöhnliche Differentialgleichungen

2. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lokalen oder globalen Lipschitzbedingungen genügen.

1. $f(t,y) = y^2$
2. $f(t,y) = \frac{1}{1+y^2}$
3. $f(t,y) = e^t y$

(b) Auf dem 1. Übungsblatt (Aufgabe G2) haben wir gezeigt, dass die Differentialgleichung $y'(t) = \sqrt{|y(t)|},\ t \in \mathbb{R}$, mit Anfangswert $y(0) = 0$ unendlich viele Lösungen besitzt. Warum ist dies kein Widerspruch zu Kapitel II, Satz 1.6?

LÖSUNG: (a) 1. $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)| = 2\xi|y_1 - y_2|$ mit $\xi \in (y_1, y_2)$. Also genügt f einer lokalen aber keiner globalen Lipschitzbedingung.

2. Wir haben folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|f(t,y_1) - f(t,y_2)| &= \left|\frac{1}{1+y_1^2} - \frac{1}{1+y_2^2}\right| = \frac{|y_2^2 + 1 - (y_1^2+1)|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} = \frac{|y_1+y_2||y_1-y_2|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} \\
&\leq \frac{(|y_1| + |y_2|)|y_1 - y_2|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} \\
&= \left(\frac{|y_1|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} + \frac{|y_2|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)}\right)|y_1 - y_2| \\
&\leq \Big(\underbrace{\frac{|y_1|}{1+y_1^2}}_{\leq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{|y_2|}{1+y_2^2}}_{\leq \frac{1}{2}}\Big)|y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_2|.
\end{aligned}$$

Also genügt f einer globalen Lipschitzbedingung mit Lipschitz-Konstante $L = 1$.

3. $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |e^t y_1 - e^t y_2| = e^t|y_1 - y_2|$. Also genügt f einer lokalen aber keiner globalen Lipschitzbedingung.

(b) Kapitel II, Satz 1.6 garantiert die Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0$, unter der Voraussetzung, dass $f(t,y)$ in y lokal Lipschitz-stetig ist. Die Funktion $f(t,y) = \sqrt{|y|}$ ist allerdings in 0 nicht Lipschitz-stetig. Anschaulich gesprochen liegt dies am senkrechten Anstieg der Wurzelfunktion bei $y = 0$. Angenommen f genüge einer Lipschitzbedingung in einer Umgebung U von $y = 0$, dann gilt $|\sqrt{|y|} - 0| \leq L|y - 0|$, für eine geeignete Konstante L und alle $y \in U$. Hieraus folgt aber, dass $\frac{\sqrt{|y|}}{y} = \frac{1}{\sqrt{|y|}} \leq L$ für alle $y \in U$. Dies ist ein Widerspruch, denn $\frac{1}{\sqrt{|y|}} \xrightarrow{y \to 0} \infty$.

(G 2)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, so genügt f in D einer lokalen Lipschitzbedingung.

(b) Genügt f in der offenen Menge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ einer lokalen Lipschitzbedingung und ist $K \subset D$ kompakt, so genügt f in K einer Lipschitzbedingung.

LÖSUNG: (a) Kurze Vorbemerkung: Aus Analysis II wissen wir, dass auf $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind. Somit können wir hier $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen.

Sei nun $(t_0, x_0) \in D$. Dann gibt es eine offene Kugel $U_r(t_0, x_0) \subset D$ um (t_0, x_0) mit Radius $r > 0$, so dass $V := \overline{U_r(t_0, x_0)} \subset D$ (hier bezeichnet $\overline{U_r(t_0, x_0)}$ den Abschluß von $U_r(t_0, x_0)$).
Die Menge V ist kompakt und konvex. Für $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ schreiben wir nun $f = (f_1, \ldots, f_n)$, wobei $f_i : D \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$.
Da $(t, x) \mapsto \nabla f_i(t, x)$, für $i = 1, \ldots, n$, eine stetige Funktion ist und stetige reellwertige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Maximum annehmen, folgt die Existenz von

$$L_i := \max\{\|\nabla f_i(t, x)\|_\infty : (t, x) \in V\}$$

für $i = 1, \ldots, n$. Aus dem Schrankensatz (Analysis II, Kapitel VI, Satz 2.9) folgt

$$|f_i(t, x) - f_i(t, y)| \leq L_i \|x - y\|_\infty$$

für alle $(t, x), (t, y) \in V$ und $i = 1, \ldots, n$. Insbesondere erhalten wir nun mit $L := \max_i L_i$ die Abschätzung

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_\infty = \max_i |f_i(t, x) - f_i(t, y)| \leq L \|x - y\|_\infty$$

für alle $(t, x), (t, y) \in V$. Somit genügt f einer lokalen Lipschitzbedingung.

(b) Wäre die Aussage falsch, dann gäbe es zu jedem $L \geq 0$ zwei Punkte $(t, x), (t, y) \in K$ mit $\|f(t, x) - f(t, y)\|_2 > L$. Insbesondere gibt es dann zwei Folgen $((t_n, x_n))_n$ und $((t_n, y_n))_n$ in K mit

$$\|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)\|_2 > n\|x_n - y_n\|_2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Wegen der Kompaktheit von K existieren konvergente Teilfolgen $(t_{n_k})_k$, $(x_{n_k})_k$ und$(y_{n_k})_k$, deren Grenzwerte wir mit t, x und y bezeichnen. Wir betrachten nun Ungleichung (1) nur noch für die konvergenten Teilfolgen. Für $k \to \infty$ konvergiert die linke Seite von (1), also muss wegen des Faktors n_k auf der rechten Seite $(\|x_{n_k} - y_{n_k}\|_2)_k$ eine Nullfolge sein, d.h. $x = y$. Auf Grund der vorausgesetzten lokalen Lipschitzbedingung von f gibt es eine Umgebung U von (t, x), so dass die Einschränkung von f auf $U \cap K$ einer Lipschitzbedingung genügt, also gilt

$$\|f(\tilde{t}, \tilde{x}) - f(\tilde{t}, \tilde{y})\|_2 \leq \tilde{L} \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2,$$

für eine geeignete Konstante $\tilde{L} > 0$ und alle $(\tilde{t}, \tilde{x}), (\tilde{t}, \tilde{y}) \in U \cap K$. Für hinreichend großes k liegen die Punkte (t_{n_k}, x_{n_k}) und (t_{n_k}, y_{n_k}) in $U \cap K$ und somit gilt für diese n_k die Abschätzung

$$\|f(t_{n_k}, x_{n_k}) - f(t_{n_k}, y_{n_k})\|_2 \leq \tilde{L} \|x_{n_k} - y_{n_k}\|_2.$$

Dies ist aber für $n_k > \tilde{L}$ ein Widerspruch zu (1).

(G 3) (Äquivalente Metrik)

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Wir betrachten den Raum $C(I, \mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}^n$ versehen mit der üblichen Metrik d, definiert durch

$$d(u, v) := \sup_{t \in I} \|u(t) - v(t)\|_2, \quad u, v \in C(I, \mathbb{R}^n),$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

(a) Sei $L \geq 0$. Zeigen Sie, dass $\tilde{d}$ definiert durch

$$\tilde{d}(u,v) := \sup_{t \in I} \|e^{-(L+1)t}(u(t) - v(t))\|_2, \quad u, v \in C(I, \mathbb{R}^n),$$

ebenfalls eine Metrik auf dem Raum $C(I, \mathbb{R}^n)$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Metrik $\tilde{d}$ äquivalent zur Metrik d ist, d.h. es existieren Kontanten $0 < m \leq M$ mit

$$m\, d(u,v) \leq \tilde{d}(u,v) \leq M\, d(u,v),$$

für alle $u, v \in C(I, \mathbb{R}^n)$.

(c) Nun sei (X, d) ein beliebiger metrischer Raum und $\tilde{d}$ eine zu d äquivalente Metrik. Zeigen Sie, dass der metrische Raum $(X, \tilde{d})$ genau dann vollständig ist, falls (X, d) vollständig ist.

LÖSUNG: (a) Die Eigenschaften einer Metrik sind klar: Für alle $u, v, w \in C(I, \mathbb{R}^n)$ gilt

1. $\tilde{d}(u,v) \geq 0$,
2. $\tilde{d}(u,v) = 0 \Longleftrightarrow u = v$,
3. $\tilde{d}(u,v) = \tilde{d}(v,u)$,
4. $\tilde{d}(u,v) \leq \tilde{d}(u,w) + \tilde{d}(w,v)$.

Somit ist $\tilde{d}$ eine Metrik.

(b) Für alle $t \in [a,b]$ gilt

$$e^{-(L+1)b} \leq e^{-(L+1)t} \leq e^{-(L+1)a}.$$

Somit kann $m = e^{-(L+1)b}$ und $M = e^{-(L+1)a}$ gewählt werden. Dies beweist die Äquivalenz.

(c) Wegen der Äquivalenz von d und $\tilde{d}$ existieren Konstanten $0 < m \leq M$ mit

$$m\, d(x,y) \leq \tilde{d}(x,y) \leq M\, d(x,y),$$

für alle $x, y \in X$. Sei (X, d) vollständig und $(x_k)_k \subset X$ eine Cauchy-Folge bzgl. der Metrik $\tilde{d}$. Da für alle $k, l \in \mathbb{N}$

$$d(x_k, x_l) \leq \frac{1}{m}\tilde{d}(x_k, x_l)$$

gilt, folgt dass $(x_k)_k$ ebenfalls eine Cauchy-Folge bzgl. der Metrik d ist. Wegen der Vollständigkeit von (X, d) konvergiert $(x_k)_k$ gegen ein $x \in X$. Da für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{d}(x_k, x) \leq M d(x_k, x)$$

gilt, konvergiert $(x_k)_k$ auch bzgl. der Metrik $\tilde{d}$ gegen $x \in X$. Die andere Richtung geht analog.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ einer Lipschitzbedingung oder einer lokalen Lipschitzbedingung genügen.

1. $f(x,y) := x|y|$
2. $f(x,y) := \sin(|y|^{-1})$ für $y \neq 0$, $f(x,0) = 0$ für alle x
3. $f(t,y) = \frac{1}{1+t^2+y^2}$

LÖSUNG: 1. $|f(x,y)-f(x,y')| = |x|\big||y|-|y'|\big| \leq |x||y-y'|$. Also erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung aber keine globale, da $|f(x,y)-f(x,y')| \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ für jede festen $y \neq y'$.

2. Erfüllt keine Lipschitzbedingung. Ist nicht mal stetig.

3. Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(1+t^2+y^2)^2}$ ist beschränkt auf ganz $\mathbb{R}^2$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt für alle $(t,y_1),(t,y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi)\right| |y_1-y_2|,$$

mit $\xi \in (y_1,y_2)$. Daher genügt f einer globalen Lipschitzbedingung mit Lipschitz-Konstante $L = \sup\{|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)| : (t,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

(H 2) (6 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y' = \dfrac{xy}{x^2-1} + e^x\sqrt{1-x^2}$, $y(0)=1$;

(b) $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$, $y(1)=0$;

Hinweis: Riccatische DGL. Erraten Sie eine Lösung.

LÖSUNG: (a) Wir benutzen Satz 3.1 der Vorlesung (Variation der Konstanten) Damit gilt

$$y(x) = e^{G(x)} + \int_0^x e^s\sqrt{1-s^2}e^{\int_s^x \frac{t}{t^2-1}\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

mit $G(x) = \int_0^x \frac{t}{t^2-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ (da x nahe 0). Weiter gilt

$$\int_s^x \frac{t}{t^2-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln(1-x^2)-\ln(1-s^2)) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1-x^2}{1-s^2}).$$

Also folgt

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{1-x^2} + \int_0^x e^s\sqrt{1-s^2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-s^2}}\mathrm{d}s \\ &= \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}\int_0^x e^s\mathrm{d}s \\ &= \sqrt{1-x^2}(1+e^x-1) = \sqrt{1-x^2}e^x \end{aligned}$$

(b) Wie sich leicht nachrechnen lässt, ist $y_0(x) = \frac{1}{x}$ eine Lösung der Gleichung $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$. Der Ansatz $u = y - y_0$ führt wegen $u(1) = y(1) - 1 = -1$ und

$$\begin{aligned} u'(x) &= y(x) + \frac{2}{x}^2 + \frac{1}{x}^2 \\ &= y^2(x) - \frac{1}{x}^2 \\ &= (y(x)+\frac{1}{x})(y(x)-\frac{1}{x}) \\ &= (u(x)+\frac{2}{x})u(x) \\ &= u(x)^2 + \frac{2}{x}u(x) \end{aligned}$$

auf das AWP $u' = u^2 + \frac{2}{x}u$, $u(1) = -1$ für u.

Dies ist eine Bernoulli Dgl. Wir lösen diese indem wir zunächst $v = \frac{1}{u}$ substituieren. Wir erhalten dann $v' = -1 - \frac{2}{x}v$, $v(1) = -1$ als Gleichung für v.

Es gilt

$$e^{\int_s^x 2/t\mathrm{d}t} = e^{-2\ln t|_1^x} = \frac{s^2}{x^2}.$$

Damit ergibt sich als Lösung der homogenen Gleichung

$$v_h(x) = c \cdot e^{\int_1^x 2/t\mathrm{d}t} = \frac{c}{x^2}$$

und als spezielle Lösung berechnen wir

$$v_s(x) = \int_1^x (-1)e^{\int_s^x 2/t\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = -\int_1^x \frac{c}{x^2}\mathrm{d}s = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3x^2}.$$

Damit ergibt sich

$$v(x) = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3x^2} + \frac{c}{x^2} = \frac{1+3c}{3x^2} - \frac{x}{3}$$

Mit der Anfangsbedingung $v(1) = c = -1$ folgt also $v(x) = -\frac{2+x^3}{3x^2}$. Beachtet man noch $u = \frac{1}{v}$ so erhält man schließlich

$$y(x) = u(x) + y_0(x) = -\frac{3x^2}{2+x^3} + \frac{1}{x}.$$

(H 3) (6 Punkte)

Es seien $S = [0, a] \times \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $f \in C(S)$. Desweiteren genüge f der Bedingung

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq \frac{k}{x}|y - z|$$

für $0 < x \leq a$ und $y, z \in \mathbb{R}$, mit $k < 1$.

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(t,y) \quad \text{in } J,\ y(0) = \eta$$

genau eine Lösung besitzt und dass sich diese durch sukzessive Approximation berechnen lässt.

Hinweis: Betrachten Sie den Operator

$$(Tu)(t) := \int_0^t f(s, \eta + u(s))\mathrm{d}s$$

im Banachraum $C([0, a])$ mit der Norm $\|u\| := \sup\{|u(t)|/t : 0 < t \leq a\}$ und zeigen Sie, dass dieser genau einen Fixpunkt besitzt.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{|Tu - Tv|}{t} &\leq \frac{1}{t}\int_0^t |f(s, \eta + u(s)) - f(s, \eta + v(s))|\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{t}\int_0^t \frac{k}{s}|u(s) - v(s)|\mathrm{d}s \\
&\leq \|u - v\|\frac{1}{t}\int_0^t k\mathrm{d}s \\
&\leq k\|u - v\|.
\end{aligned}$$

T ist also eine Kontraktion in $C([0,a])$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz folgt die (eindeutige) Existenz eines Fixpunkts w. Weiter gilt $w(0)=0$.

Bleibt noch zu zeigen, dass $w+\eta$ das AWP löst. Die Fixpunkteigenschaft liefert

$$w(t) = (Tw)(t) = \int_0^t f(s, \eta + w(s))\mathrm{d}s$$

Differenzieren liefert

$$(w+\eta)'(t) = w'(t) = f(t,\eta) \quad \text{ und } w(0)+\eta = \eta.$$