Fachbereich Mathematik
PD Dr. R. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 3./4.11.2009

Analysis III
Gewöhnliche Differentialgleichungen

2. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lokalen oder globalen Lipschitzbedingungen genügen.

1. $f(t, y) = y^2$
2. $f(t, y) = \frac{1}{1+y^2}$
3. $f(t, y) = e^t y$

(b) Auf dem 1. Übungsblatt (Aufgabe G2) haben wir gezeigt, dass die Differentialgleichung $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$, $t \in \mathbb{R}$, mit Anfangswert $y(0) = 0$ unendlich viele Lösungen besitzt. Warum ist dies kein Widerspruch zu Kapitel II, Satz 1.6?

(G 2)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, so genügt f in D einer lokalen Lipschitzbedingung.

(b) Genügt f in der offenen Menge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ einer lokalen Lipschitzbedingung und ist $K \subset D$ kompakt, so genügt f in K einer Lipschitzbedingung.

(G 3) (Äquivalente Metrik)

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Wir betrachten den Raum $C(I, \mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}^n$ versehen mit der üblichen Metrik d, definiert durch

$$d(u, v) := \sup_{t \in I} \|u(t) - v(t)\|_2, \quad u, v \in C(I, \mathbb{R}^n),$$

wobei $\| \cdot \|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

(a) Sei $L \geq 0$. Zeigen Sie, dass $\tilde{d}$ definiert durch

$$\tilde{d}(u, v) := \sup_{t \in I} \|e^{-(L+1)t}(u(t) - v(t))\|_2, \quad u, v \in C(I, \mathbb{R}^n),$$

ebenfalls eine Metrik auf dem Raum $C(I, \mathbb{R}^n)$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Metrik $\tilde{d}$ äquivalent zur Metrik d ist, d.h. es existieren Kontanten $0 < m \leq M$ mit

$$m\, d(u,v) \leq \tilde{d}(u,v) \leq M\, d(u,v),$$

für alle $u, v \in C(I, \mathbb{R}^n)$.

(c) Nun sei (X, d) ein beliebiger metrischer Raum und $\tilde{d}$ eine zu d äquivalente Metrik. Zeigen Sie, dass der metrische Raum $(X, \tilde{d})$ genau dann vollständig ist, falls (X, d) vollständig ist.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ einer Lipschitzbedingung oder einer lokalen Lipschitzbedingung genügen.

1. $f(x, y) := x|y|$
2. $f(x, y) := \sin(|y|^{-1})$ für $y \neq 0$, $f(x, 0) = 0$ für alle x
3. $f(t, y) = \frac{1}{1+t^2+y^2}$

(H 2) (6 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y' = \dfrac{xy}{x^2-1} + e^x\sqrt{1-x^2}$, $y(0) = 1$;

(b) $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$, $y(1) = 0$;

Hinweis: Riccatische DGL. Erraten Sie eine Lösung.

(H 3) (6 Punkte)

Es seien $S = [0, a] \times \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $f \in C(S)$. Desweiteren genüge f der Bedingung

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq \frac{k}{x}|y - z|$$

für $0 < x \leq a$ und $y, z \in \mathbb{R}$, mit $k < 1$.

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y) \quad \text{in } J, \quad y(0) = \eta$$

genau eine Lösung besitzt und dass sich diese durch sukzessive Approximation berechnen lässt.

Hinweis: Betrachten Sie den Operator

$$(Tu)(t) := \int_0^t f(s, \eta + u(s))\mathrm{d}s$$

im Raum

$$X := \{u \in C([0, a]) : \sup_{t\in(0,a]} |u(t)|/t < \infty\}$$

mit der Norm $\|u\| := \sup_{t\in(0,a]} |u(t)|/t$. Verwenden Sie ohne Beweis, dass dieses ein Banachraum ist und zeigen Sie, dass T genau einen Fixpunkt besitzt.