Fachbereich Mathematik
PD Dr. R. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl. math. Christian Komo

Wintersemester 09/10
20./21.10.2009

Analysis III
Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 2ty^2(t)$$
$$y(0) = y_0 > 0$$

Geben Sie das maximale Intervall an, in dem die Lösung existiert.

LÖSUNG: Für eine Lösung y des Problems gilt wegen $y(0) > 0$ auch $y(t) > 0$ in einer geeigeten Umgebung von 0 (warum?). In dieser Umgebung gilt dann

$$2t = \frac{y'(t)}{y^2(t)}, \ y(0) = y_0.$$

Integration und Substitution $s = y(t)$ liefert dann

$$t^2 = 2\int_0^t x\,dx = \int_0^t \frac{y'(x)}{y^2(x)}dx = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{s^2}ds = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(t)}.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach $y(t)$ erhalten wir

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0t^2}.$$

Man sieht durch leichtes Nachrechnen, dass diese Funktion für $|t| < \frac{1}{\sqrt{y_0}}$ wirklich eine Lösung liefert. Sie läßt sich aber nicht über dieses Intervall hinaus fortsetzen, da y an den Intervallenden unbeschränkt wird.

(G 2)

Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(x) = \sqrt{|y(x)|}, \ x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{4}, & \text{falls } x \geq x_0, \\ 0, & \text{falls } x < x_0 \end{cases}$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist und erraten Sie noch eine weitere (offensichtliche) Lösung.

(b) Skizzieren Sie eine Auswahl dieser Lösungen in ein Schaubild.

(c) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem zu dieser Differentialgleichung mit $y(0) = 0$ unendlich viele Lösungen hat.

(d) Gibt es ein $y_0 > 0$, so dass das Anfangswertproblem mit $y(0) = y_0$ eindeutig lösbar ist?

LÖSUNG: (a) Für alle $x < x_0$ gilt $y'(x) = 0 = \sqrt{|0|} = \sqrt{|y(x)|}$ und auch für alle $x > x_0$ haben wir

$$y'(x) = \frac{1}{2}(x - x_0) = \frac{1}{2}|x - x_0| = \sqrt{\left|\frac{(x - x_0)^2}{4}\right|} = \sqrt{|y(x)|}.$$

Wir untersuchen also noch $x = x_0$. Es gilt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{h^2 - 0}{4h} = \lim_{h \searrow 0} h = 0$$

und

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Also ist y stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ (man beachte, dass das eine der Bedingungen aus der Definition von Lösung einer Differentialgleichung ist!) und es gilt auch in x_0

$$y'(x_0) = 0 = \sqrt{|y(x_0)|}.$$

Die weitere leicht zu erratende Lösung ist $y \equiv 0$.

(b)

(c) Nach Teil (a) ist jede Funktion der Form

$$y_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{4}, & \text{falls } x \geq x_0, \\ 0, & \text{falls } x < x_0 \end{cases}$$

eine Lösung der Differentialgleichung und für alle $x_0 \geq 0$ gilt auch $y_{x_0}(0) = 0$. Für alle $x_0 \geq 0$ ist also y_{x_0} eine Lösung des Anfangswertproblems und diese Lösungen sind auch alle offensichtlich verschieden. Da es unendlich viele positive reelle Zahlen gibt, hat das gegebene Anfangswertproblem damit unendlich viele verschiedene Lösungen.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y^3(t),\ t \in I, \quad y(0) = 1$$

und bestimmen Sie das maximale Intervall $I \subset \mathbb{R}$, für das die Lösung existiert. Wie verhält sich die Lösung am Rand dieses Intervalls? Begründen Sie, warum sich die Lösung nicht fortsetzen lässt.

LÖSUNG: Mit Trennung der Variablen ergibt sich für $y \neq 0$

$$\int_0^t y'(t)y^{-3}(t)\mathrm{d}t = \int_0^t 1\mathrm{d}t$$

also

$$\int_{y(0)}^{y(t)} u^{-3}\mathrm{d}u = t$$

und damit

$$-\frac{1}{2}y(t)^{-2} + \frac{1}{2} = t.$$

Auflösen nach y ergibt

$$y(t) = (-2t+1)^{-1/2}\,.$$

Man sieht, dass die Rechnung für $t \in (-\infty, 1/2)$ gültig ist. Für $t \to 1/2$ geht die Lösung gegen unendlich. Deshalb kann es nach Rechts keine stetige Fortsetzung von y geben. Damit ist $(-\infty, 1/2)$ das maximale Intervall, in dem die Lösung existiert.

(H 2) (6 Punkte)

Gegeben sei eine Differentialgleichung, mit der Form $y'(t) = f(y/t)$, d.h. die rechte Seite ist eine Funktion von y/t.

(a) Zeigen Sie, dass eine solche Differentialgleichung in eine Gleichung umgeformt werden kann, die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann.

(b) Lösen Sie die Gleichung

$$y'(t) = 2\frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2,$$

falls $y(t) > 0$.

(c) Es sei $g(y,t) = \frac{t+y}{t-y}$. Geben Sie eine Funktion f an, so dass $f(y/t) = g(y,t)$ gilt. Wieso ist es trotzdem schwierig, die zugehörige Differentialgleichung $y'(t) = g(y,t)$ explizit zu lösen?

LÖSUNG: (a) Es sei $v(t) = y(t)/t$, also $y(t) = tv(t)$, dann gilt $y'(t) = tv'(t) + v(t)$. Die Differentialgleichung für v lautet daher $tv' + v = f(v)$. Diese lässt eine Trennung der Variablen zu, denn

$$tv' + v = f(v) \quad \Leftrightarrow \quad v' = \frac{1}{t}(f(v) - v).$$

(b) Hier ist speziell $f(v) = 2v + v^2$ und es gilt

$$\frac{1}{f(v) - v} = \frac{1}{v^2 + v} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}.$$

Damit erhält man durch Integration

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{v^2+v}\,\mathrm{d}v &= \int \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\,\mathrm{d}v \\ &= \ln|v| - \ln|1+v|\end{aligned}$$

Mit der Gleichung ergibt sich

$$\ln\frac{|v|}{|1+v|} = \ln t + c$$

Auflösen nach v (Beachte $v > 0$):

$$v = \frac{e^c t}{1 - e^c t}$$

und daher

$$y = \frac{e^c t^2}{1 - e^c t}$$

(c) Wir rechnen

$$\frac{t+y}{t-y} = \frac{1+y/t}{1-y/t} = f(y/t)$$

mit $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Weiter gilt

$$f(v) - v = \frac{1+v^2}{1-v}$$

und damit ergibt sich mit Trennung der Variablen

$$\int \frac{1-v}{1+v^2} = \arctan(v) + \frac{1}{4}\frac{1}{(1+v^2)^2} = \ln t.$$

Die Explizite Lösung der Differentialgleichung ist deshalb schwer, da man die obige Gleichung noch nach v auflösen muss.

(H 3) (6 Punkte)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x\,(1 + y^2(x)),\ x > 0, \quad y(0) = 0.$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \cos(x + y)$$

Hinweis: Substitutieren Sie $z(x) = x + y(x)$

Lösung: (a) Aus

$$\int_0^y \frac{1}{1+\eta^2}\,d\eta = \int_0^x \xi\,d\xi$$

erhält man $\arctan(y(x)) = \frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Da $y(0) = 0$, folgt $c = 0$ und somit

$$y(x) = \tan\left(x^2/2\right).$$

(b) Mit $z(x) = x + y(x)$ und $y' = z' - 1$ ergibt sich die DGL

$$z' = 1 + \cos(z).$$

Fall 1: $z' \equiv 0$. Es folgt $z(x) = (2n+1)\cdot\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, also $y(x) = (2n+1)\cdot\pi - x$.

Fall 2: $z' \not\equiv 0$. Trennung der Variablen ergibt

$$\int \frac{1}{1+\cos(\eta)}\,d\eta = \int 1\,d\xi.$$

Da $\tan(\eta/2)' = \frac{1}{1+\cos(\eta)}$, folgt somit $\tan(z(x)/2) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, also

$$y(x) = 2\arctan(x+c) - x, \quad c \in \mathbb{R}.$$