Fachbereich Mathematik
PD Dr. R. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 20./21.10.2009

Analysis III
Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= 2ty^2(t) \\
y(0) &= y_0 > 0
\end{aligned}
$$

Geben Sie das maximale Intervall an, in dem die Lösung existiert.

(G 2)

Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(x) = \sqrt{|y(x)|},\ x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$
y(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{4}, & \text{falls } x \geq x_0, \\ 0, & \text{falls } x < x_0 \end{cases}
$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist und erraten Sie noch eine weitere (offensichtliche) Lösung.

(b) Skizzieren Sie eine Auswahl dieser Lösungen in ein Schaubild.

(c) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem zu dieser Differentialgleichung mit $y(0) = 0$ unendlich viele Lösungen hat.

(d) Gibt es ein $y_0 > 0$, so dass das Anfangswertproblem mit $y(0) = y_0$ eindeutig lösbar ist?

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$
y'(t) = y^3(t),\ t \in I, \quad y(0) = 1
$$

und bestimmen Sie das maximale Intervall $I \subset \mathbb{R}$, für das die Lösung existiert. Wie verhält sich die Lösung am Rand dieses Intervalls? Begründen Sie, warum sich die Lösung nicht fortsetzen lässt.

(H 2) (6 Punkte)

Gegeben sei eine Differentialgleichung, mit der Form $y'(t) = f(y/t)$, d.h. die rechte Seite ist eine Funktion von y/t.

(a) Zeigen Sie, dass eine solche Differentialgleichung in eine Gleichung umgeformt werden kann, die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann.

(b) Lösen Sie die Gleichung

$$y'(t) = 2\frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2$$

für $t > 0$, falls $y > 0$.

(c) Es sei $g(y,t) = \frac{t+y}{t-y}$. Geben Sie eine Funktion f an, so dass $f(y/t) = g(y,t)$ gilt. Wieso ist es trotzdem schwierig, die zugehörige Differentialgleichung $y'(t) = g(y,t)$ explizit zu lösen?

(H 3) (6 Punkte)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x\,(1 + y^2(x)),\ x > 0, \quad y(0) = 0.$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \cos(x + y)$$

Hinweis: Substitutieren Sie $z(x) = x + y(x)$