Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Birgit Debrabant
Felix Riechwald
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13.02.2009

Analysis I für M, LaG, Ph

14. Übung

Gruppenübung

G1 Substitution und Partielle Integration I

Berechne die folgenden Integrale:

i)
$$\int_1^2 xe^x dx,$$

ii)
$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx,$$

iii)
$$\int_0^\pi \sin^4(x) dx.$$

G2 Integration (un-)gerader Funktionen

i) Sei $f \in C^0([-a,a])$ eine ungerade Funktion, d.h., für alle $x \in [-a,a]$ ist $f(-x) = -f(x)$. Dann gilt
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

ii) Sei $f \in C^0([-a,a])$ eine gerade Funktion, d.h., für alle $x \in [-a,a]$ ist $f(-x) = f(x)$. Dann gilt
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx.$$

G3 Ellipse

Seien $a, b > 0$. Berechne den Flächeninhalt der Ellipse
$$E := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$
also das Doppelte des Integrals $\int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$.

Hausübung

H1 Substitution und Partielle Integration II

Berechne die folgenden Integrale:

i)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx,$$

ii)
$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx,$$

iii)
$$\int_0^1 \arctan(x)dx.$$

H2 Stetigkeit und Integration II

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Zeige, dass ein Punkt $x_0 \in [a, b]$ existiert mit $f(x_0) = 0$.

H3 Gleichmäßige Konvergenz und Integration

In der Vorlesung wurde der folgende Satz behandelt: Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine gleichmäßig konvergente Folge Riemann-integrierbarer Funktionen und sei $f := \lim_{n\to\infty} f_n$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Im Folgenden sind konvergente Funktionenfolgen angegeben:

i)
$$f_n^1(x) := \frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}nx\right),$$

ii)
$$f_n^2(x) := \begin{cases} 2^{2n}x & \text{für } x \le 2^{-n} \\ -2^{2n}x + 2^{n+1} & \text{für } 2^{-n} < x \le 2^{-n+1} \\ 0 & \text{für } x > 2^{-n+1}, \end{cases}$$

iii)
$$f_n^3(x) := \sin(\pi x^n)$$

.

Welche dieser Folgen konvergiert gleichmäßig im Intervall $[0, 1]$? Bestimme jeweils $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^i(x)dx$ und $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n^i(x)dx$, $i = 1, 2, 3$. Welche Folge dient als Beispiel bzw. Gegenbeispiel des obigen Satzes?

Hinweis: Zur Bestimmung des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n^3(x)dx$ *verwende die Ungleichung*

$$\sin(x) \le x \qquad \textit{für alle } x \ge 0.$$