Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Farwig
Raphael Schulz, Felix Riechwald

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
6. Februar 2009

13. Übungsblatt zur „Analysis I (deutsch)“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Rechnen mit komplexen Zahlen)
Berechne

$$(2i+1)(-3i-1), \qquad \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}}, \qquad 2e^{3i\pi/4}\cdot 3e^{i\pi/4}, \qquad -3e^{i\pi/2}\cdot 1e^{i\pi/4}.$$

Gebe alle Ergebnisse sowohl in Standardform $a+bi$ als auch in Polardarstellung $re^{i\phi}$ an.

Aufgabe G2 (Komplexe Potenzreihen)
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit reellen (!) Koeffizienten a_k und mit Konvergenzradius $r>0$. Zeige:

i) $\overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{z}^k$.

ii) Falls $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle der durch die Potenzreihe gegebenen Funktion ist, dann ist auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle.

iii) Falls die durch die Potenzreihe definierte Funktion eine ungerade (endliche) Anzahl von Nullstellen hat, dann muss mindestens eine dieser Nullstellen reell sein.

Aufgabe G3 (Ober- und Untersummen)
Sei die Funktion $f(x)=x$ auf $[0,1]$ gegeben. Für die speziellen Partitionen

$$P_n := \{x_k = \frac{k}{n} \colon k \in \{0,\dots,n\}\}$$

berechne die Untersummen $L(P_n, f)$ und die Obersummen $U(P_n, f)$ für f.
Konvergieren die Ober- bzw. Untersummen für $n\to\infty$?
Ist f Riemann-integrierbar auf $[0,1]$?
Was ist gegebenenfalls der Wert des Integrals?

Hausübung

Aufgabe H1 (Der komplexe Einheitskreis) (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$.

i) Wieviele Lösungen besitzt die Gleichung $z^n = 1$? Gebe eine allgemeine Formel für diese Lösungen an. Diese Zahlen heißen n-te Einheitswurzeln.

ii) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Gebe alle Lösungen der Gleichung $z^n = z_0$ an.

iii) Zeige, dass das Produkt über alle n-ten Einheitswurzeln gerade $(-1)^{n+1}$ ergibt.

iv) Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, falls $z \neq 1$, $|z| = 1$.

Aufgabe H2 (Komplexe Zahlen) (4 Punkte)

Wir definieren analog zum reellen Fall: $\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ und $\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Beweise:

i) $\sin(iz) = i\sinh(z)$, und $\cos(iz) = \cosh(z)$.

ii) Das Additionstheorem für sin im Komplexen, also

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$$

für zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2.

iii) $\mathrm{Re}(\sin(z)) = \sin(x)\cosh(y)$ und $\mathrm{Im}(\sin(z)) = \cos(x)\sinh(y)$.

iv) $|\sin(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$.

v) Beweise oder widerlege die folgenden Gleichungen:

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1, \qquad |\sin(z)|^2 + |\cos(z)|^2 = 1$$

Ist $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion, das heißt: Gibt es eine Konstate $K > 0$ sodass $|\sin(z)| \leq K$ für alle $z \in \mathbb{C}$?

Aufgabe H3 (Riemann-Integrierbarkeit) (4 Punkte)

Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, wie folgt definiert: Falls $x \notin \mathbb{Q}$, dann sei $f(x) = 0$. Falls $x \in \mathbb{Q}$ und $x = \frac{p}{q}$ die eindeutige Darstellung von x mit teilerfremden Zahlen $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ ist, sei $f(x) = q^{-1}$. Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist.