Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Farwig
Raphael Schulz, Felix Riechwald

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
30. Januar 2009

12. Übungsblatt zur „Analysis I (deutsch)“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Konvergenzbegriffe) (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für eine Folge beschränkter Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, die gleichmäßig konvergiert, die Grenzfunktion f wiederum beschränkt ist. Dies ist bei punktweiser Konvergenz im Allgemeinen falsch.

Gebe ein Beispiel für eine Folge beschränkter Funktionen an, die punktweise konvergiert, deren Grenzfunktion aber nicht beschränkt ist.

Andererseits gilt aber die folgende Aussage: Falls die Funktionenfolge $(f_n)_n$ gleichmäßig beschränkt ist (das heißt, es existiert ein $K > 0$ mit $|f_n(x)| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in D$) und falls f_n punktweise (nicht notwendigerweise gleichmäßig) konvergiert, dann ist auch die Grenzfunktion f beschränkt durch die selbe Konstante K. Beweise diese Aussage.

Aufgabe G2 (Potenzreihen)

Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen. Konvergieren die Reihen in i) bis iii) auch auf den Randpunkten des Konvergenzkreises?

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} x^k$

iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^k}{5+(-1)^{k+1}}\right)^k x^k$

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{(-1)^k k^2} x^k$

Aufgabe G3 (Potenzreihen)

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ Potenzreihen mit Konvergenzradien r_1 und r_2. Wir nehmen an, $r_1 \leq r_2$.

i) Zeige: Der Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k x^k$ erfüllt $r \geq r_1 r_2$. Überlege ein Beispiel, in dem $r > r_1 r_2$ gilt.

ii) Zeige: Der Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) x^k$ ist $r = r_1$, falls $r_1 < r_2$. Was ist mit dem Fall $r_1 = r_2$? Gilt dann automatisch die Gleichheit $r = r_1 = r_2$?

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvergenzbegriffe)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(x) = 0$ für alle $x \notin [-1, 1]$. Der Einfachheit halber und um Fallunterscheidungen zu vermeiden, nehmen wir an, dass f nicht identisch Null ist.

Konvergieren die folgenden Funktionenfolgen gleichmäßig, punktweise oder gar nicht?

- $f_n(x) := f(x - n)$,
- $g_n(x) := f(x)/n$,
- $h_n(x) := f(x/n)$,
- $k_n(x) := f(nx)$,

$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Was ist die jeweilige Grenzfunktion, falls sie existiert?

Aufgabe H2 (Potenzreihen und Ableitungen) (4 Punkte)

i) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ und finde eine einfache Darstellung (ohne Reihe) für diese Funktion.

ii) Bestimme alle Ableitungen der Funktion $f(x) := \frac{1}{1+x^3}$ in $x_0 = 0$.

Aufgabe H3 (Tschebyscheff-Polynome) (4 Punkte)

Auf $[-1, 1]$ seien die folgenden Funktionen gegeben:

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x)), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Diese heißen *Tschebyscheff-Polynome*.

i) Zeige folgende Rekursionsformel:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

ii) Berechne $T_n(x)$ für $n \in \{1, \dots, 5\}$.

iii) Zeige, dass die Funktionen T_n tatsächlich Polynome sind. Welchen Grad hat T_n? Sind die T_n gerade bzw. ungerade Funktionen?

iv) Bestimme alle Nullstellen von T_n in $[-1, 1]$.

v) Zeige, dass der Wertebereich durch -1 nach unten und durch 1 nach oben beschränkt ist. Finde alle lokalen Extrema von T_n.