Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Farwig
Raphael Schulz, Felix Riechwald

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
16. Januar 2008

11. Übungsblatt zur „Analysis I (deutsch)“

Gruppenübung

Aufgabe G0 (Minitest Stetigkeit)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Gebe zu jeder Aussage auch ihre Negation an.

- ☐ Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
- ☐ Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit Grenzwert $a \in D$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.
- ☐ Es existiert ein Punkt $a \in D$ und ein Punkt $b \in D$, so dass $f(a) = \inf\{f(x)\colon x \in D\}$ und $f(b) = \sup\{f(x)\colon x \in D\}$. (Also nimmt f sein Maximum und Minimum an.)

Aufgabe G1 (Funktionenfolge)
Untersuchen sie die Funktionenfolge

$$f_n(x) = e^{-nx}, \qquad x \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N},$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe G2 (De l'Hospital'sche Regel)
Die Funktion $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert als $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Bestimme die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} x^{-2}(\cosh(x) - 1)$

(b) $\lim_{x\to 5}(6 - x)^{\frac{1}{x-5}}$

Aufgabe G3 (Konvexe Funktionen)
Zeige die Ungleichung

$$\log(x + y) \leq \frac{x \log x + y \log y}{x + y} + \log 2$$

für alle $x, y > 0$. Hinweis: Betrachte die Funktion $x \mapsto x \log x$.

Hinweis:

Am nächsten Freitag, dem 23. Januar, findet die Probeklausur statt. Die Übungen um 8:00 und um 13:30 fallen an diesem Tag aus. Um die Probeklausur mitzuschreiben, sollten die Studenten einen der Übungstermine um 9:50 oder 11:40 wahrnehmen.
Die Hausübungen auf dem vorliegenden Übungsblatt sind innerhalb von zwei Wochen zu bearbeiten und erst am 30. Januar abzugeben.

Hausübung

Aufgabe H1 (Grenzwerte) (4 Punkte)

(a) Bestimme die folgenden Grenzwerte:

i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log x}$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x^2) - 1 + x^2}{x^4}$

(b) Wo steckt der Fehler in der Anwendung der l'Hospital'schen Regel?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

Wie lautet der richtige Grenzwert?

Aufgabe H2 (Konvexe Funktionen) (4 Punkte)

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

(a) Sei außerdem $g\colon I \to \mathbb{R}$ konvex. Zeige, dass $f + g$ konvex ist.

(b) Sei nun $g\colon J \to I$ konvex und f zusätzlich monoton wachsend. Zeige, dass $f \circ g\colon J \to \mathbb{R}$ konvex ist.

(c) Seien $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ zwei relative Minima der konvexen Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$. Zeige $f(x_1) = f(x_2)$.

Aufgabe H3 (Funktionenreihe) (4 Punkte)

Untersuche die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + \frac{1}{x^n}), \qquad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Falls die Reihe konvergiert: Ist die dadurch gegebene Funktion stetig? Ist sie differenzierbar? Gebe gegebenenfalls die Ableitung an.