Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Birgit Debrabant
Felix Riechwald
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19.12.2008

Analysis I für M, LaG, Ph

10. Übung

Gruppenübung

G1 Differentiation I

Die Funktion $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

und heißt *Cosinus Hyperbolicus.* Auf $(0,\infty)$ besitzt cosh eine Umkehrfunktion $\text{arcosh} : (1,\infty) \to (0,\infty)$, diese nennt man *Areacosinus Hyperbolicus.* Man zeige die Darstellung

$$\text{arcosh}\,(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Differenziere die folgenden Funktionen auf passenden Definitionsbereichen:

$$\cosh(x), \qquad \text{arcosh}\,(x), \qquad \sqrt[x]{x}, \qquad x^{\log x}.$$

G2 Mittelwertsatz

Beweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für alle $x \in (0,\infty)$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\log x \le x - 1.$$

G3 Leibniz'sche Formel

Sei $D \subset \mathbb{R}$, ferner seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen. Beweise die *Leibniz'sche Formel*

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Diese Formel verallgemeinert die Produktregel.
(Hinweis: Es gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ für $k \ge 1$.)

Hausübung

H1 Kettenregel II (4 Punkte)

Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Beweise, dass

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}$$

für alle $x \in (0,\infty)$ gilt.

H2 Differentiation II (4 Punkte)

i) Die Funktion f sei differenzierbar in $[a, b]$ und für alle $x \in [a, b]$ gelte

$$|f(x)| + |f'(x)| \neq 0.$$

Beweise, dass f in $[a, b]$ nur endlich viele Nullstellen hat.

ii) Zeige die folgenden Ungleichungen mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

a) $e^a\,(b-a) < e^b - e^a < e^b\,(b-a)$ für $a < b$,

b) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ für alle $x > 0$.

H3 Taylor-Polynom (4 Punkte)

i) Bestimme den minimalen Grad $n \in \mathbb{N}$ des Taylor-Polynoms der Funktion e^{-2x} mit Entwicklungspunkt 1, so dass sich das Taylor-Polynom und die Funktion e^{-2x} auf $(0, 2)$ höchstens um $0,1$ unterscheiden.

ii) Beschreibe die Funktion $\frac{1}{1-x}$ durch ihr Taylor-Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit Entwicklungspunkt 0 und zugehörigem Restglied.

Zusatz Differentiation im Schnee (4 Punkte)

Zur Einstimmung auf ein besinnliches Weihnachtsfest seien hier Funktionen auf $(0, \infty)$ angegeben, die sich ganz leicht aus ein paar Schneeflocken konstruieren lassen:

$$f(\divideontimes) := \divideontimes^{(\divideontimes^{\divideontimes})} \quad \text{und} \quad g(\divideontimes) := (\divideontimes^{\divideontimes})^{\divideontimes}.$$

Wir wollen nun diese Schneeflocken-Funktionen genauer analysieren.

i) Bestimme die Ableitungen dieser Funktionen in der Variable $\divideontimes \in (0, \infty)$.

ii) Für welche $\divideontimes \in (0, \infty)$ ist f größer, kleiner bzw. gleich g?

iii) Dem Weihnachtsmann sind seine Rentiere entlaufen, nun muss er allein mit Hilfe der Schwerkraft seinen Schlitten bewegen. Er steht im Punkt $(0, g(0))$ und möchte sich entlang des Graphen von g von seinem Schlitten tragen lassen. Dabei wird der Schlitten an der Stelle $\divideontimes \in (0, \infty)$ beschleunigt, falls $g'(\divideontimes) < 0$, und abgebremst, falls $g'(\divideontimes) > 0$. Wie weit wird der Weihnachtsmann beschleunigt?

Ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr wünscht Euch Euer Analysis-Team