Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Birgit Debrabant
Felix Riechwald
Raphael Schulz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

12.12.2008

Analysis I für M, LaG, Ph

9. Übung

Gruppenübung

G1 Gleichmäßige Stetigkeit

Gegeben seien die Funktionen

$$f : (0,1] \to \mathbb{R},\ x \to \frac{1}{x^2} \quad \text{und} \quad g : [1,\infty) \to \mathbb{R}\,,\ x \to \frac{1}{x^2}.$$

Untersuche die Funktionen f und g auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.

G2 Differentiation und Betragsfunktion

i) Differenziere die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x|x|$.

ii) Betrachte die Funktion $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_k(x) := |x|^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist g_k differenzierbar. Bestimme die Ableitung von g_k.

iii) Gibt es nicht-differenzierbare Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $|h|$ differenzierbar ist?

G3 Kettenregel I

Sei die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Für alle $x \in (a,b)$ gelte

$$f'(x) = g\left(f(x)\right).$$

Zeige, dass dann auch f beliebig oft differenzierbar ist.

Hausübung

H1 Exponentialfunktion/Logarithmus vs. Polynome (4 Punkte)
Vergleiche das asymptotische Verhalten der Exponentialfunktion bzw. des Logarithmus mit dem von Polynomen. Man zeige also

$$\lim_{x\to\infty} x^{-n}\exp(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{n}\exp(x) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{-n}\log(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x^{n}\log(x) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

H2 Stetige Fortsetzung (4 Punkte)

i) Welche der Funktionen

$$e^{-\frac{1}{x}} \qquad \text{und} \qquad e^{-\frac{1}{x^2}}$$

lassen sich in Null stetig fortsetzen?

ii) Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *c-periodisch* mit einer reellen Konstanten $c > 0$, wenn $f(x + c) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht-konstante, stetige, c-periodische Funktion für ein $c > 0$. Lässt sich die Funktion $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(\frac{1}{x})$, in Null stetig fortsetzen?

H3 Differentiation und Umkehrfunktion (4 Punkte)
Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x + \frac{1}{1 + x^2}.$$

i) Zeige, daß f eine Umkehrfunktion g besitzt.

ii) Zeige, daß die Umkehrfunktion g differenzierbar ist, und berechne $g'(1)$ und $g''(1)$.