Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Birgit Debrabant
Felix Riechwald
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

05.12.2008

Analysis I für M, LaG, Ph

8. Übung

Gruppenübung

G1 Überdeckungskompaktheit

Man zeige mithilfe der Heine-Borelschen Überdeckungseigenschaft (s. Satz 6.7 der Vorlesung), dass

i) $(0,1)$ nicht kompakt ist,

ii) $\{\frac{1}{n} | \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ kompakt ist.

G2 Stetigkeit I

i) Zeige mithilfe einer ε-δ-Abschätzung, daß die folgende Funktion auf $\mathbb{R}$ stetig ist:

$$f(x) = x^3.$$

ii) Jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Ist diese Behauptung richtig?

G3 Maximum und Minimum

Besitzen die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

und

$$g : [-e, e] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sqrt{e^{x+e} - 1} - |x|}{x^6 + 17}$$

ein Maximum, ein Minimum oder beides?

Hausübung

H1 Stetigkeit II (4 Punkte)

i) Zeige mithilfe einer ε-δ-Abschätzung, daß die reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

stetig ist.

ii) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in einem Punkte $x \in D$. Zeige, daß es eine Umgebung U von x gibt, so daß $f : U \cap D \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt ist.

H2 Ein Fixpunktsatz (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei zudem $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a, b]) \subseteq [a, b]$. Zeige, dass f mindestens einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

H3 Funktionalgleichung (4 Punkte)

Zeige, dass alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Funktionalgleichung

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

erfüllen, linear sind.