Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Birgit Debrabant
Felix Riechwald
Raphael Schulz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

21.11.2008

Analysis I für M, LaG, Ph

6. Übung

Gruppenübung

Test I Reihen

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert für $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$.

c) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so konvergiert auch jede beliebige Umordnung der Reihe gegen den gleichen Grenzwert.

d) Sei $(a_n)n \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe absolut.

G1 Konvergenz von Reihen I

Entscheide, ob die folgenden Reihen konvergieren, und berechne gegebenenfalls den Grenzwert.

i) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2^k} + (-\frac{1}{3})^k)$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

iii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^c}$ mit einer reellen Zahl $\alpha > 2$.

G2 Leibniz-Kriterium

i) Untersuche die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz, falls

$$(a)\ a_k = \frac{2-(-1)^k}{4k}, \quad (b)\ a_k = (-1)^k\left(e - (1+\frac{1}{k})^k\right).$$

ii) Finde eine Nullfolge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, die nur aus positiven reellen Zahlen besteht, so dass

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$$

nicht konvergiert.
Ist das ein Widerspruch zum Konvergenzkriterium von Leibniz?

G3 Quotienten- und Wurzelkriterium

Entscheide, ob die folgenden Reihen konvergieren:

i) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{2^k}$

ii) $\sum_{k=5}^{\infty}\sqrt{\frac{e}{2}}^{8k}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{4k^2}$ mit der Eulerschen Zahl e (s 5. Übung, H3)

iii) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$

Hausübung

H1 Konvergenz von Reihen II (4 Punkte)

Entscheide, ob die folgenden Reihen konvergieren:

i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k}$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sqrt[k]{k}$

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta + \frac{1}{k}\right)^k$ mit einem reellen Parameter $\beta \geq 0$.

H2 Zur absoluten Konvergenz (4 Punkte)

Es sei $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ eine absolut konvergente Reihe, so dass $a_j \neq -1$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann auch

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{1+a_j}$$

absolut konvergiert.

H3 Reihen (4 Punkte)

i) Es sei $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ eine absolut konvergente Reihe. Zeige, dass dann auch:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{|a_j a_{j+1}|}$$

konvergiert.

ii) Beweise oder widerlege die Umkehrung: Es sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{|a_j a_{j+1}|}$$

konvergiert. Dann konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ absolut.