Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Birgit Debrabant
Felix Riechwald
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14.11.2008

Analysis I für M, LaG, Ph

5. Übung

Gruppenübung

G1 Folgen und Teilfolgen

Man beweise oder widerlege die folgenden Behauptungen:

i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Weiter sei $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a > 0$.

iii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge mit einer gegen y konvergierenden Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Dann konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y.

iv) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die Folge $(\frac{1}{x_{\varphi(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert.

G2 Cauchy-Folgen

i) Zeige an Hand der Definition, dass die durch

$$a_n := \frac{1+4n^2}{2+2n^2}$$

definierte Folge eine Cauchy-Folge ist.

ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit einer gegen y konvergierenden Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Man beweise, dass dann auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert.

G3 Limes Superior und Limes Inferior

Bestimme Limes Superior und Limes Inferior der nachstehenden Folgen:

$$a_n := \begin{cases} \frac{2n}{n+1} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{n}{2n+1} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}, \qquad b_n := \frac{(-1)^n n}{n+1}.$$

Hausübung

H1 Arithmetisches und Geometrisches Mittel (4 Punkte)

Für zwei Zahlen x, y nennt man $\frac{x+y}{2}$ das arithmetische Mittel und $\sqrt{x \cdot y}$ das geometrische Mittel dieser Zahlen.

Es seien zwei Zahlen $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_1 < b_1$ gegeben. Damit definieren wir rekursiv die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeige:

i) $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

iii) Beide Folgen sind konvergent.

iv) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

H2 Häufungspunkte (4 Punkte)

Konstruiere jeweils eine Folge, deren Häufungspunkte genau die Menge:

i) $\{-m, -m+1, -m+2, ..., m-2, m-1, m\}$ für $m \in \mathbb{N}$ bzw.

ii) $\mathbb{Z}$ ist.

H3 Folgen und Grenzwerte III (4 Punkte)

Wir wollen die Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ untersuchen. Für diese soll die Existenz eines Grenzwertes nachgewiesen werden:

i) Die Folge ist nach oben und unten beschränkt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$2 \leq (1 + \frac{1}{n})^n \leq 3.$$

(Man verwende: Für alle $k \geq 4$ gilt $k! \geq 2^k$ (Ohne Beweis). Außerdem sind die Bernoulli Ungleichung, die Binomische Formel und Aufgabe G3)1. des 2. Übungsblattes hilfreich.)

ii) Die Folge ist monoton steigend.

iii) Schließe nun, dass für diese Folge ein Grenzwert existiert.

Dieser Grenzwert ist die sog. Eulersche Zahl $e = 2,718281828459...$ und eine der wichtigsten Konstanten in der Analysis. Da aber die Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$ nur sehr langsam konvergiert und für die Analysis eine andere Darstellung von e geeigneter ist, werden wir die Eulersche Zahl in der Vorlesung auf eine andere Weise definieren.

Zusatzaufgabe:

Mit diesen Kenntnissen über die Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$ zeige man:

iv) Die Folge $\sqrt[n]{n}$ ist ab dem dritten Glied monoton fallend.