Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Birgit Debrabant
Felix Riechwald
Raphael Schulz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

07.11.2008

Analysis I für M, LaG, Ph

4. Übung

Gruppenübung

G1 Surjektivität und Injektivität

Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv bzw. surjektiv? Begründe deine Antwort sorgfältig.

i) $f_1 : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ungerade}\} \to \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ gerade}\}, \quad n \mapsto 2n.$

ii) $f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \;\; x \mapsto x^4 + 8$. (Beweise und verwende dabei, dass $x \mapsto x^2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ injektiv ist.)

iii) $f_3 : \{M \subset \mathbb{R} \mid M \neq \emptyset, \; M \text{ beschränkt}\} \to \mathbb{R}, \quad M \mapsto \sup M.$

G2 Überabzählbarkeit

Man zeige die folgenden Behauptungen:

i) Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.
(Hinweis: Nehme an, es gäbe eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Betrachte dann die Menge $A := \{ \, n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n) \, \} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.)

ii) Die Menge aller Folgen mit Einträgen 0 und 1, also $\{ \, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n = 0 \text{ oder } a_n = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \, \}$, ist überabzählbar.

G3 Folgen und Grenzwerte I

i) Die Summe und das Produkt zweier konvergenter Folgen ist wieder konvergent (s. Vorlesung). Gebe jeweils ein Beispiel an, dass die Umkehrung i.a. nicht gilt. Konstruiere also je eine konvergente Folge bestehend aus divergenten Summanden bzw. divergenten Faktoren.

ii) Sei $\varepsilon > 0$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$a_n := \frac{5n+2}{n}.$$

Bestimme den Grenzwert a dieser Folge und gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

iii) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n}.$$

Zeige die Konvergenz dieser Folge und bestimme ihren Grenzwert.

Hausübung

H1 (Über-) Abzählbarkeit (4 Punkte)

i) Man zeige, dass die Vereinigung abzählbar unendlich vieler abzählbar unendlicher Mengen abzählbar ist. Sei also $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abzählbar unendlichen Mengen. Dann ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ abzählbar.

ii) Gebe ein Beispiel an, welches zeigt, dass das Resultat aus i) für das kartesische Produkt i.a. nicht gilt.

H2 Folgen und Grenzwerte II (4 Punkte)

i) Beweise oder widerlege die folgende Behauptung: Jede beschränkte Folge konvergiert.

ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch folgende Vorschrift definiert:

$$a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige die Konvergenz dieser Folge und bestimme ihren Grenzwert.

iii) Zeige, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \sqrt[n]{n}$$

gegen 1 konvergiert.
(Hinweis: Zeige $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$.)

H3 Konvergenz des Mittels einer Folge (4 Punkte)

i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Zeige, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ebenfalls gegen a konvergiert.
(Hinweis: Benutze folgende Aufspaltung der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{n} + \frac{a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n}{n}.$$

Wähle hierbei k geschickt anhand der Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)

ii) Zeige mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass aus der Konvergenz von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im allgemeinen nicht die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt.