Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Birgit Debrabant
Felix Riechwald
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

31.10.2008

Analysis I für M, LaG, Ph

3. Übung

Gruppenübung

G1 Supremum und Infimum von Mengen

Bestimme Suprema, Infima, Maxima und Minima der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$, falls diese existieren.

i) $A := \{\frac{1}{x} - \frac{1}{y} | \ x, y \in \mathbb{R}, \ x, y \geq 1\}$,

ii) $B := \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n} | \ n \in \mathbb{N}\right\}$,

iii) $C := \varnothing$.

G2 Mengenoperationen und (Ur-)Bilder von Funktionen

Es seien X, Y beliebige Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Weiter seien $A, A' \subseteq X$ und $B, B' \subseteq Y$. Man zeige:

i) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$, $\qquad f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

ii) $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$, $\qquad f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

Gilt sogar stets $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$?

G3 Supremum und Infimum

Für die beiden nichtleeren Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ gelte

$$a \leq b \ \text{ für alle } \ a \in A \ \text{ und } \ b \in B.$$

Begründe die Existenz von $s := \sup A$ und $t := \inf B$ und zeige

i) $\sup A \leq \inf B$. (Tipp: Widerspruchsbeweis)

ii) $\sup A = \inf B \quad \Longleftrightarrow \quad$ für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $b - a < \varepsilon$. (Tipp für die Rückrichtung: Zeige zunächst, dass t obere Schranke von A ist. Zeige anschließend $\sup A = t$.)

Hausübung

H1 Funktionen (4 Punkte)
Es seien X, Y beliebige Mengen und $f: X \to Y$ eine Abbildung. Weiter seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$. Man zeige

$$f(X \backslash A) \supseteq f(X) \backslash f(A), \qquad f^{-1}(Y \backslash B) = f^{-1}(Y) \backslash f^{-1}(B).$$

H2 Supremum und Addition (4 Punkte)

i) Gegeben seien nichtleere beschränkte Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren die Summe dieser Mengen elementweise:

$$A + B := \{ \ a + b | \ a \in A, \ b \in B \ \}.$$

Zeige:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

ii) Seien $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit beschränkten Bildern $f(\mathbb{R})$ und $g(\mathbb{R})$. Das Supremum einer Funktion ist das Supremum ihres Bildes:

$$\sup f := \sup f(\mathbb{R}).$$

Die Summe von diesen Funktionen wird punktweise definiert und bildet eine neue Funktion $(f + g): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h.:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeige

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g.$$

Warum erhält man i.a. in der Teilaufgabe ii) keine Gleichheit? Gebe ein Beispiel an, in dem eine echte Ungleichheit vorliegt. Worin liegt der Unterschied zur Teilaufgabe i) ?

H3 Supremum (4 Punkte)
Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ werde rekursiv definiert durch $x_1 := \sqrt{2}$ und

$$x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

und sei $M := \{ \ x_n | \ n \in \mathbb{N} \ \}$. Zeige, dass 2 eine obere Schranke von M ist, und bestimme das Supremum dieser Menge.