Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Farwig
Birgit Debrabant, Raphael Schulz, Felix Riechwald

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
24. Oktober 2008

2. Übungsblatt zur „Analysis I (deutsch)“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Ungleichungen lösen)

Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, für die die folgenden Ungleichungen gelten.

(a) $x + 1 \leq 2|x| \leq x + 2$

(b) $|x - 2| \leq |x + 1|$

(c) $|x| \geq x^2$

Rechtfertigen Sie Ihre Überlegungen mit den Anordungsaxiomen und ihren Folgerungen aus dem Skript.

Aufgabe G2 (Beträge und Ungleichungen)

Zeige: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$.
Hinweis: Benutze keine Fallunterscheidung, sondern setze $c := a + b$ und $d := a - b$ und formuliere die Ungleichung in c und d.

Aufgabe G3 (Vollständige Induktion)

Beweisen Sie die untenstehenden Aussagen mittels vollständiger Induktion. Hierbei sei $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$.

1. $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
2. Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten, n verschiedene Dinge anzuordnen.
3. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Hausübung

Aufgabe H1 (Ungleichungen lösen) (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Ungleichung $x \leq |x - 1|$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Ungleichung $|x + 5| + |x + 3| \leq 10$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Aufgabe H2 (Maximum, Minimum, Beträge) (4 Punkte)

Für zwei reelle Zahlen a und b definieren wir:

$$\max\{a, b\} := \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a < b \end{cases}, \qquad \text{und} \qquad \min\{a, b\} := \begin{cases} b, & a \geq b \\ a, & a < b \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie: $\min\{a, b\} = -\max\{-a, -b\}$.

(b) Zeigen Sie: $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.

(c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

Aufgabe H3 (Vollständige Induktion) (4 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die untenstehenden Aussagen. Hier sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(a) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer endlichen Menge M mit n Elementen hat genau 2^n Elemente.
Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, dass es für festes $a \in M$ genauso viele Teilmengen von M gibt, die das Element a enthalten, wie welche, die a nicht enthalten.

(c) $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$