Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Birgit Debrabant
Felix Riechwald
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

17.10.2008

Analysis I für M, LaG, Ph

1. Übung

Gruppenübung

G1 Relationen im Alltag

Sei M die Menge aller Menschen. Welche der Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transivität haben die folgenden Relationen auf M?

i) die Relation "ist Vorfahre von"

ii) die Relation "ist verheiratet mit"

iii) die Relation "hat den gleichen Vater und die gleiche Mutter wie"

Was müsste gelten, damit aus *ii)* eine Äquivalenzrelation wird?

G2 Partition und Relation

Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dabei nennt man

$$[a] := \{b \in M | \; b \sim a\}$$

die *Äquivalenzklasse* von $a \in M$.
Zeige, dass $\{[a] \mid a \in M\}$ eine Partition von M ist.

G3 Folge von Mengen

Sei $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen. Wir definieren

$$\liminf\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{i\in\mathbb{N}, i>j} M_i, \quad \text{(Limes inferior)}$$

$$\limsup\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}, i>j} M_i. \quad \text{(Limes superior)}$$

i) Man mache sich Folgendes klar:
Die Menge $\liminf\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ enthält alle Elemente, die für ein $j \in \mathbb{N}$ in allen Mengen M_i, $i > j$, enthalten sind.
Die Menge $\limsup\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ enthält alle Elemente, die in unendlich vielen Mengen M_i, $i \in \mathbb{N}$ enthalten sind.

ii) Beweise, dass
$$\liminf\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \limsup\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$$
gilt.

Hausübung

H1 Eine Äquivalenzrelation (4 Punkte)
Sei $\sim$ eine Relation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die folgendermassen definiert ist:

$$(m, n) \sim (m', n') :\Leftrightarrow m + n' = m' + n.$$

i) Zeige, dass $(2, 3) \sim (3, 4)$ gilt.
ii) Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.
iii) Skizziere die Partition von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bzgl. dieser Äquivalenzrelation.

H2 Kartesisches Produkt (4 Punkte)

i) Zeige, dass das Kartesische Produkt nicht kommutativ ist, d.h. $X \times Y = Y \times X$ gilt nicht.
ii) Beweise, dass $X \times Y = X \times Z$ und $X \neq \emptyset$ die Gleichheit $Y = Z$ implizieren.

H3 Grenzwert von Mengenfolgen (4 Punkte)
Falls $\liminf\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \limsup\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, dann definieren wir

$$\lim\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} := \liminf\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \limsup\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

Bestimmen Sie, falls möglich, $\lim\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ für die folgenden Mengen

i) $M_i = [0, i] \subset \mathbb{R}$,
ii) $M_i = [0, 1/i]$,
iii) $M_i = [0, 1]$ für i gerade, $[-1, 0]$ für i ungerade.