Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
R. Schulz, F. Riechwald

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
23. Januar 2009

Probeklausur
„Analysis I (deutsch) für M und Ph“

Name: .... | Studiengang: ....

Vorname: .... | Fachsemester: ....

Matrikelnummer: .... | Übungsgruppenleiter: ....

Für die Klausur wird eigenes Papier verwendet. Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren vollständigen Namen und Ihre Matrikelnummer. Als Hilfsmittel sind alle schriftlichen Unterlagen zugelassen. Die Klausur dauert 90 Minuten.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
Punktzahl	5	5	5	5	5	25	
erreichte Punktzahl							

Die Noten werden folgendermaßen vergeben:

Punkte	0-7	8-10	11	12	13	14	15	16	17	18	19-25
Note	5	4,0	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,7	1,3	1,0

1. Aufgabe(Richtig oder falsch?) (5 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Jede korrekte Antwort gibt einen Punkt; für jede falsche Antwort wird ein Punkt wieder abgezogen. Mindestpunktzahl der Aufgabe ist aber 0, das heißt als Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe werden keine Minuspunkte vergeben.

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f stetig.
(Richtig) (Falsch)

(b) Die Menge aller irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist abzählbar.
(Richtig) (Falsch)

(c) Jede beschränkte reelle Folge besitzt einen Grenzwert.
(Richtig) (Falsch)

(d) Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt.
(Richtig) (Falsch)

(e) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.
(Richtig) (Falsch)

Lösung: Richtig sind (a) und (d). Alle anderen Aussagen sind falsch.

2. Aufgabe(Induktion und Konvergenz) (5 Punkte)
Die folgende rekursive Folge sei gegeben:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} := \frac{6(1+a_n)}{7+a_n}$$

Zeige, dass $0 < a_n \leq 2$, dass $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dass die Folge konvergiert. Gebe außerdem den Grenzwert an.

Lösung: Es ist klar, dass $a_0 > 0$. Außerdem ist $a_{n+1} > 0$, falls $a_n > 0$, also sind mit dem Induktionsprinzip alle Folgenglieder positiv. (1 Punkt)
Offensichtlich gilt $a_0 \leq 2$. Außerdem ist

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{6+(1+a_n)}{6(1+a_n)} = \frac{1}{1+a_n} + \frac{1}{6} \geq \frac{1}{1+2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

falls $a_n \leq 2$. Mit dem Induktionsprinzip gilt also $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (1 Punkt)
Um die Monotonität zu zeigen, betrachten wir

$$a_{n+1} - a_n = \frac{6(1+a_n)}{7+a_n} + \frac{(7+a_n)a_n}{7+a_n} = \frac{6-a_n-a_n^2}{7+a_n} \geq \frac{6-2-4}{7+a_n} = 0,$$

da wir schon gesehen hatten, dass $a_n \leq 2$. Daraus folgt, dass $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (1 Punkt)
Nun haben wir gezeigt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt ist. Also konvergiert sie. (1 Punkt) Um den Grenzwert a zu bestimmen, nehmen wir

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{6(1+a_n)}{7+a_n} = \frac{6(1+\lim_{n\to\infty} a_n)}{7+\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{6(1+a)}{7+a}$$

und erhalten also als notwendige Bedingung an a die Gleichung $a^2+a-6=0$, welche zwei Lösungen besitzt: -3 und 2. Da die Folge a_n positiv ist, kommt als Grenzwert nur $a=2$ in Frage. (1 Punkt)

3. Aufgabe(Reihen) (5 Punkte)
Gebe alle Parameter $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ an, für die die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(2+\alpha)^k}$$

konvergiert. Für welche α konvergiert die Reihe sogar absolut?

Lösung: Wir nehmen das Quotientenkriterium (Wurzelkriterium geht genau so einfach) und erhalten

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{k(2+\alpha)^k}{(k+1)(2+\alpha)^{k+1}} \right| = \frac{1}{|2+\alpha|}. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Dies ist offensichtlich echt kleiner als 1, falls $\alpha \in M_1 := (-\infty,-3) \cup (-1,\infty)$. Also konvergiert die Reihe für solche α absolut. (1 Punkt) Für $\alpha \in M_2 := (-3,-1)$ ist der obige

Quotient echt größer als 1 und also divergiert die Reihe für diese α. (1 Punkt) Es bleibt zu überprüfen, ob die Reihe für $\alpha = -1$ und $\alpha = -3$ konvergiert. Für $\alpha = -1$ ist die Reihe gerade die Leibnizreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ und die Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium (aber nicht absolut) (1 Punkt). Für $\alpha = -3$ ist die Reihe gerade die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ und divergiert also. (1 Punkt)

4. Aufgabe(Stetigkeit) (5 Punkte)

Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeige: Es existiert ein $x \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

Hinweis: Betrachte die Hilfsfunktion $g\colon [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $g(x) := f(x) - f(x + \frac{1}{2})$.

Lösung: Die Funktion g ist stetig als Summe von stetigen Funktionen. (1 Punkt) Außerdem ist

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)) = -g\left(\frac{1}{2}\right)$$

und daraus folgt, dass entweder $g(0) = 0$ ist, oder $g(0)$ ein anderes Vorzeichen hat als $g\left(\frac{1}{2}\right)$. (1 Punkt) Nach dem Zwischenwertsatz hat g also eine Nullstelle. (2 Punkte) Die Nullstelle von g ist gerade der gesuchte Punkt, was direkt aus der Definition von g folgt. (1 Punkt)

5. Aufgabe(Funktionenreihe) (5 Punkte)

Untersuche die folgende Funktionenreihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k(1-x), \qquad x \in [0,1]$$

Lösung: Für $x = 1$ ist die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k(1-1) = 0$. (1 Punkt) Für $x \in [0,1)$ haben wir dagegen mit geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k(1-x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)\frac{1}{1-x} = 1. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Das beweist, dass die Summe punktweise auf ganz $[0,1]$ gegen

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

konvergiert. (1 Punkt) Allerdings ist die Grenzfunktion unstetig, obwohl alle Summanden stetig sind. (1 Punkt) Damit kann die Reihe nicht gleichmäßig konvergent sein. (1 Punkt)