Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
R. Schulz, F. Riechwald

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
23. Januar 2009

Probeklausur „Analysis I (deutsch) für M und Ph“

Name:	Studiengang: ....
Vorname:	Fachsemester: ....
Matrikelnummer:	Übungsgruppenleiter: ....

Für die Klausur wird eigenes Papier verwendet. Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren vollständigen Namen und Ihre Matrikelnummer. Als Hilfsmittel sind alle schriftlichen Unterlagen zugelassen. Die Klausur dauert 90 Minuten.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
Punktzahl	5	5	5	5	5	25	
erreichte Punktzahl							

1. Aufgabe(Richtig oder falsch?) (5 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Jede korrekte Antwort gibt einen Punkt; für jede falsche Antwort wird ein Punkt wieder abgezogen. Mindestpunktzahl der Aufgabe ist aber 0, das heißt als Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe werden keine Minuspunkte vergeben.

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f stetig.
(Richtig) (Falsch)

(b) Die Menge aller irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist abzählbar.
(Richtig) (Falsch)

(c) Jede beschränkte reelle Folge besitzt einen Grenzwert.
(Richtig) (Falsch)

(d) Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt.
(Richtig) (Falsch)

(e) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.
(Richtig) (Falsch)

2. Aufgabe(Induktion und Konvergenz) (5 Punkte)
Die folgende rekursive Folge sei gegeben:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} := \frac{6(1+a_n)}{7+a_n}$$

Zeige, dass $0 < a_n \leq 2$, dass $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dass die Folge konvergiert. Gebe außerdem den Grenzwert an.

3. Aufgabe(Reihen) (5 Punkte)
Gebe alle Parameter $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ an, für die die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(2+\alpha)^k}$$

konvergiert. Für welche α konvergiert die Reihe sogar absolut?

4. Aufgabe(Stetigkeit) (5 Punkte)
Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeige: Es existiert ein $x \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.
Hinweis: Betrachte die Hilfsfunktion $g\colon [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $g(x) := f(x) - f(x + \frac{1}{2})$.

5. Aufgabe(Funktionenreihe) (5 Punkte)
Untersuche die folgende Funktionenreihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k(1-x), \qquad x \in [0,1]$$