Analysis I für M, LaG, Ph

14. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G1 Substitution und Partielle Integration I

Berechne die folgenden Integrale:

i)
$$\int_1^2 xe^x dx,$$

ii)
$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx,$$

iii)
$$\int_0^\pi \sin^4(x) dx.$$

i) Partielles Integrieren liefert

$$\int_1^2 xe^x dx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

ii) Mit der Substitution $t := \sqrt{x}$ und anschließender partieller Integration folgt

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 2te^t dt = 2te^t\Big|_1^2 - 2\int_1^2 e^t dt = 2e^2.$$

iii) Partielles Integrieren liefert

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^4(x) dx &= -\sin^3(x)\cos(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi 3\sin^2(x)\cos^2(x) dx \\ &= 0 + \int_0^\pi 3\sin^2(x)\left(1 - \sin^2(x)\right) dx.\end{aligned}$$

Stellen wir die Gleichung nach $\int_0^\pi \sin^4(x)dx$ um, so erhält man mit dem Beispiel aus dem Skript (s. Seite 181)

$$\int_0^\pi \sin^4(x) dx = \frac{3}{4}\int_0^\pi \sin^2(x) dx = \frac{3}{8}\pi.$$

G2 Integration (un-)gerader Funktionen

i) Sei $f \in C^0([-a,a])$ eine ungerade Funktion, d.h., für alle $x \in [-a,a]$ ist $f(-x) = -f(x)$. Dann gilt
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

ii) Sei $f \in C^0([-a,a])$ eine gerade Funktion, d.h., für alle $x \in [-a,a]$ ist $f(-x) = f(x)$. Dann gilt
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx.$$

i) Es gilt $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$ *(s. Skript Seite 174, (iii)). Mit der Substitution* $t := -x$ *erhalten wir*

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-y)dy = \int_0^a f(-y)dy = -\int_0^a f(y)dy$$

und damit

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_0^a f(y)dy + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

ii) Es gilt $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$ *(s. Skript Seite 174, (iii)). Mit der Substitution* $t := -x$ *erhalten wir*

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-y)dy = \int_0^a f(-y)dy = \int_0^a f(y)dy$$

und damit

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(y)dy + \int_0^a f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx.$$

G3 Ellipse

Seien $a, b > 0$. Berechne den Flächeninhalt der Ellipse

$$E := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

also das Doppelte des Integrals $\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx$.

Mit der Substitution $t := \frac{x}{a}$*, Aufgabe G2) und dem Beispiel aus dem Skript (s. Seite 180-181,* $\int_0^1 \sqrt{1-y^2}dy = \frac{\pi}{4}$*) erhalten wir*

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx &= 2ab \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt \\ &= 2ab \cdot 2\int_0^1 \sqrt{1-y^2}dy = \pi ab. \end{aligned}$$

Hausübung

H1 Substitution und Partielle Integration II

Berechne die folgenden Integrale:

i)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx,$$

ii)

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx,$$

iii)

$$\int_0^1 \arctan(x)dx.$$

i) Mit der Substitution $t := \cos(x)$ folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \int_1^{\cos(\frac{\pi}{4})} -\frac{1}{t}dt$$
$$= -\log(t)\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\log(2)}{2}.$$

ii) Mit der Substitution $t := 1 - x^2$ folgt

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \int_1^0 -\frac{1}{2}\sqrt{t}dt = -\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_1^0 = \frac{1}{3}.$$

iii) Mit partieller Integration und anschließender Substitution $t := 1 + x^2$ erhalten wir

$$\int_0^1 \arctan(x)dx = \int_0^1 1 \cdot \arctan(x)dx = x \cdot \arctan(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$
$$= \arctan(1) - \int_1^2 \frac{1}{2t}dt = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{1}{2}\log(t)\right)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\log(2)}{2}.$$

Nebenbei: Eine geometrische Interpretation. Die Funktion tan *bildet das Intervall* $[0, \frac{\pi}{4}]$ *bijektiv auf das Intervall* $[0, 1]$ *ab. Betrachten wir das Rechteck* $[0, \frac{\pi}{4}] \times [0, 1]$ *und in diesem den Graphen von* tan*. Das Rechteck hat natürlich die Fläche* $\frac{\pi}{4}$*. Nach Aufgabenteil i) ist die Fläche unterhalb des Graphen (und vom Rechteck eingeschlossen) gerade* $\frac{\log(2)}{2}$*. Das Integral der Umkehrfunktion*

$$\int_0^1 \arctan(x)dx$$

beschreibt nun aber gerade die Fläche links des Graphen (und vom Rechteck eingeschlossen), also die verbleibende Fläche $\frac{\pi}{4} - \frac{\log(2)}{2}$*.*

H2 Stetigkeit und Integration II

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Zeige, dass ein Punkt $x_0 \in [a, b]$ existiert mit $f(x_0) = 0$.

Angenommen $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und f stetig. Nehmen wir weiter an, dass es $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) > 0$ und $f(x_2) < 0$ gibt. Dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x_3 \in [a, b]$ mit $f(x_3) = 0$ gibt. (Widerspruch zur Annahme!)
Sei also oBdA $f > 0$ auf $[a, b]$ (der Fall $f < 0$ auf $[a, b]$ wird dann auf den ersten Fall mit $-f$ zurückgeführt). Da f eine stetige Funktion auf einem Kompaktum ist, existiert ein $y \in [a, b]$ indem die Funktion f ihr Minimum annimmt: $f(y) = \min_{x\in[a,b]} f(x) > 0$. Daher folgt aber

$$0 < f(y) \cdot (b - a) = \int_a^b f(y)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

(Widerspruch zur Voraussetzung!) Es muss also einen Punkt $x_0 \in [a,b]$ geben, so dass $f(x_0) = 0$.

Alternativer Beweis: Angenommen $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$ und f stetig. Nehmen wir weiter an, dass es $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1) > 0$ und $f(x_2) < 0$ gibt. Dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x_3 \in [a,b]$ mit $f(x_3) = 0$ gibt. (Widerspruch zur Annahme!)
Sei also oBdA $f > 0$ auf $[a,b]$. (...soweit so gut, aber nun wird's neu...) Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (s. Skript Seite 178) gibt es ein $c \in [a,b]$, so dass

$$0 < f(c) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

(Widerspruch zur Voraussetzung!) Es muss also einen Punkt $x_0 \in [a,b]$ geben, so dass $f(x_0) = 0$.

H3 Gleichmäßige Konvergenz und Integration

In der Vorlesung wurde der folgende Satz behandelt: Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine gleichmäßig konvergente Folge Riemann-integrierbarer Funktionen und sei $f := \lim_{n\to\infty} f_n$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Im Folgenden sind konvergente Funktionenfolgen angegeben:

i)
$$f_n^1(x) := \frac{1}{n} \cos\left(\frac{\pi}{2} nx\right),$$

ii)
$$f_n^2(x) := \begin{cases} 2^{2n}x & \text{für } x \leq 2^{-n} \\ -2^{2n}x + 2^{n+1} & \text{für } 2^{-n} < x \leq 2^{-n+1} \\ 0 & \text{für } x > 2^{-n+1}, \end{cases}$$

iii)
$$f_n^3(x) := \sin(\pi x^n)$$

.

Welche dieser Folgen konvergiert gleichmäßig im Intervall $[0,1]$? Bestimme jeweils $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^i(x)dx$ und $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n^i(x)dx$, $i = 1,2,3$. Welche Folge dient als Beispiel bzw. Gegenbeispiel des obigen Satzes?
Hinweis: Zur Bestimmung des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n^3(x)dx$ verwende die Ungleichung

$$\sin(x) \leq x \qquad \textit{für alle } x \geq 0.$$

i) Wegen $\lim_{n\to\infty} \left(\max_{x\in[0,1]} |f_n^1(x)|\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, konvergiert die Folge $\left(f_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die konstante Null-Funktion. Also ist $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n^1(x)dx = 0$. Weiter bekommen wir

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^1(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi n^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} nx\right)\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi n^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) = 0.$$

Die Folge $\left(f_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Beispiel für das der obige Satz anwendbar ist.

ii) *Um eine Vorstellung des Verhaltens der Funktionenfolge $\left(f_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zu bekommen sollte man sich die ersten Folgenglieder skizzieren. Der Graph der Funktion f_n^2 bildet auf $[0, 2^{-n+1}]$ mit dem entsprechenden Stück der x-Achse $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2^{-n+1}, y = 0\}$ ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe 2^n. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n^2(0) = f_n^2(1) = 0$. Außerdem gibt es für alle $x \in (0, 1)$ ein $n_x \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_x$ gilt $f_n^2(x) = 0$. Allerdings gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $f(2^{-n}) = 2^n > 1$. Damit ist gezeigt, dass die Folge $\left(f_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise aber <u>nicht</u> gleichmäßig gegen die Null-Funktion konvergiert. Also ist $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n^2(x)dx = 0$. Weiter bekommen wir*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^2(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{2^{-n}} 2^{2n}xdx + \int_{2^{-n}}^{2^{-n+1}} (-2^{2n}x + 2^{n+1})dx + \int_{2^{-n+1}}^1 0dx \right)$$

(s. Skript Seite 174, (iii))

$$= \lim_{n\to\infty} \left(2^{2n-1}x^2 \Big|_0^{2^{-n}} + (-2^{2n-1}x^2 + 2^{n+1}x) \Big|_{2^{-n}}^{2^{-n+1}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(2^{-1} - 2 + 2^2 + 2^{-1} - 2\right) = 1.$$

Die Folge $\left(f_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also ein Gegenbeispiel für den obigen Satz und zeigt, dass man gleichmäßige Konvergenz an die Funktionenfolge fordern muss um von vornherein (a priori) das Integral mit dem Limes vertauschen zu können. (In der Analysis IV werden wir viel schwächere Voraussetzungen hierfür an die Funktionenfolge stellen können und trotzdem die Vertauschbarkeit von Integral und Limes erhalten. Aber bis dahin... Gleichmäßige Konvergenz!)

iii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n^3(0) = f_n^3(1) = 0$. Außerdem gilt für alle $x \in (0, 1)$*

$$\lim_{n\to\infty} f_n^3(x) = \sin\left(\pi \lim_{x\to\infty} x^n\right) = \sin(0) = 0.$$

Allerdings gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ genau ein $x_n := \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \in (0, 1)$, so dass $f_n^3(x_n) = 1$. Damit ist gezeigt, dass die Folge $\left(f_n^3\right)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise aber <u>nicht</u> gleichmäßig gegen die Null-Funktion konvergiert. Also ist $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n^3(x)dx = 0$. Verwenden wir die für alle $x \geq 0$ gültige Ungleichung $\sin(x) \leq x$, bekommen wir

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^3(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \pi x^n dx = \lim_{n\to\infty} \left(\pi \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \Big|_0^1 = 0.$$

Die Folge $\left(f_n^3\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dient weder als Beispiel noch als Gegenbeispiel des obigen Satzes.