Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Farwig
Raphael Schulz, Felix Riechwald

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
6. Februar 2009

13. Übungsblatt zur „Analysis I (deutsch)“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Rechnen mit komplexen Zahlen)

Berechne

$$(2i+1)(-3i-1), \qquad \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}}, \qquad 2e^{3i\pi/4}\cdot 3e^{i\pi/4}, \qquad -3e^{i\pi/2}\cdot 1e^{i\pi/4}.$$

Gebe alle Ergebnisse sowohl in Standardform $a+bi$ als auch in Polardarstellung $re^{i\phi}$ an.

Lösung:

$$\begin{aligned}
(2i+1)(-3i-1) &= 5-5i = \sqrt{50}e^{i7\pi/4},\\
\frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}} &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = 1e^{i\pi/3},\\
2e^{3i\pi/4}\cdot 3e^{i\pi/4} &= 6e^{i\pi} = -6+0i,\\
-3e^{i\pi/2}\cdot 1e^{i\pi/4} &= e^{i\pi}3e^{i\pi/2}e^{i\pi/4} = 3e^{7\pi/4} = 3(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{3\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe G2 (Komplexe Potenzreihen)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit reellen (!) Koeffizienten a_k und mit Konvergenzradius $r>0$. Zeige:

i) $\overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{z}^k$.

ii) Falls $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle der durch die Potenzreihe gegebenen Funktion ist, dann ist auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle.

iii) Falls die durch die Potenzreihe definierte Funktion eine ungerade (endliche) Anzahl von Nullstellen hat, dann muss mindestens eine dieser Nullstellen reell sein.

Lösung:

i) Wir bemerken zunächst, dass wegen $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ und $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$ mit Induktion für die Partialsummen gilt:

$$\overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k.$$

Nun ist außerdem die Abbildung $z \mapsto \overline{z}$ stetig, denn es gilt $|\overline{z} - \overline{z_0}| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|$. Also gilt:

$$\overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k} = \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{z}^k.$$

ii) Dies folgt direkt aus i), denn es gilt für die Nullstelle z_0 der gegebenen Potenzreihe:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z_0}^k = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k} = \overline{0} = 0.$$

iii) Wir nehmen an, die Funktion habe keine reellen Nullstellen. Dann liegen wegen ii) genauso viele Nullstellen in der oberen imaginären Halbebene $\operatorname{Im} z > 0$ wie in der unteren Halbebene $\operatorname{Im} z < 0$. Damit hat die Funktion eine gerade Anzahl von Nullstellen. Dies beweist, dass bei einer ungeraden Anzahl von Nullstellen mindestens eine davon reell sein muss.

Aufgabe G3 (Ober- und Untersummen)

Sei die Funktion $f(x) = x$ auf $[0, 1]$ gegeben. Für die speziellen Partitionen

$$P_n := \{x_k = \frac{k}{n} \colon k \in \{0, \dots, n\}\}$$

berechne die Untersummen $L(P_n, f)$ und die Obersummen $U(P_n, f)$ für f.
Konvergieren die Ober- bzw. Untersummen für $n \to \infty$?
Ist f Riemann-integrierbar auf $[0, 1]$?
Was ist gegebenenfalls der Wert des Integrals?

Lösung: Mit der Notation aus dem Skript haben wir: $M_k = \frac{k}{n}$, $m_k = \frac{k-1}{n}$, $\Delta x_k = \frac{1}{n}$. Also ist

$$\begin{aligned} L(P_n, f) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}). \end{aligned}$$

Für die Obersummen rechnet man ähnlich und erhält $U(P_n, f) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})$. Also konvergieren sowohl die Unter- als auch die Obersummen für diese spezielle Folge von Partitionen gegen $\frac{1}{2}$. Nach dem Satz auf Seite 171 im Integrationsskript ist f also Riemann-integrierbar mit Integral $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Der komplexe Einheitskreis) (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$.

i) Wieviele Lösungen besitzt die Gleichung $z^n = 1$? Gebe eine allgemeine Formel für diese Lösungen an. Diese Zahlen heißen n-te Einheitswurzeln.

ii) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Gebe alle Lösungen der Gleichung $z^n = z_0$ an.

iii) Zeige, dass das Produkt über alle n-ten Einheitswurzeln gerade $(-1)^{n+1}$ ergibt.

iv) Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, falls $z \neq 1$, $|z| = 1$.

Lösung:

i) Das Polynom $z^n - 1$ kann höchstens n Nullstellen haben, also existieren höchsten n Lösungen. Lösungen sind:

$$e^{2k\pi i/n}, \qquad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Diese sind alle verschieden, denn es gilt für $k \neq j$, dass $e^{2k\pi i/n}/e^{2j\pi i/n} = e^{2(k-j)\pi i/n}$ und dies ist genau dann 1, wenn $k - j \in n\mathbb{Z}$. Dies ist aber nicht möglich. Wir haben also alle n Lösungen der Gleichung gefunden.

ii) Sei $z_0 = re^{i\phi}$ die Polardarstellung von z_0. Eine Lösung der Gleichung lautet $\sqrt[n]{r}e^{i\phi/n}$, wie man leicht nachrechnet. Nun können wir diese Lösung noch mit allen n-ten Einheitswurzeln multiplizieren und erhalten die n verschiedenen Lösungen $\sqrt[n]{r}e^{\frac{i(2\pi k+\phi)}{n}}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Damit haben wir alle Lösungen angegeben.

iii) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \exp(2k\pi i/n) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} 2k\pi i/n\right) \\
&= \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right) \\
&= \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= (\exp(\pi i))^{n+1} = (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

iv) Sei z wie in der Aufgabenstellung. Dann gilt:

$$|z^{n+1} - z^n| = |z|^n|z-1| = |z-1| \nrightarrow 0$$

für $n \to \infty$. Also kann $(z_n)_n$ keine Cauchyfolge sein und divergiert also.

Aufgabe H2 (Komplexe Zahlen) (4 Punkte)

Wir definieren analog zum reellen Fall: $\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ und $\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Beweise:

i) $\sin(iz) = i\sinh(z)$, und $\cos(iz) = \cosh(z)$.

ii) Das Additionstheorem für sin im Komplexen, also

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$$

für zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2.

iii) $\mathrm{Re}(\sin(z)) = \sin(x)\cosh(y)$ und $\mathrm{Im}(\sin(z)) = \cos(x)\sinh(y)$.

iv) $|\sin(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$.

v) Beweise oder widerlege die folgenden Gleichungen:

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1, \qquad |\sin(z)|^2 + |\cos(z)|^2 = 1$$

Ist $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion, das heißt: Gibt es eine Konstate $K > 0$ sodass $|\sin(z)| \leq K$ für alle $z \in \mathbb{C}$?

Lösung: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ und $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}$.

i)

$$\begin{aligned}\sin(iz) &= \frac{1}{2i}(e^{i^2 z} - e^{-i^2 z}) = \frac{-i}{2}(e^{-z} - e^{z}) = \frac{i}{2}(e^{z} - e^{-z}) = i\sinh(z),\\ \cos(iz) &= \frac{1}{2}(e^{i^2 z} + e^{-i^2 z}) = \frac{1}{2}(e^{-z} + e^{z}) = \cosh(z).\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}&\sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2) =\\ &\quad= \frac{1}{4i}((e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + (e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2}))\\ &\quad= \frac{1}{4i}(2(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)})) = \sin(z_1 + z_2).\end{aligned}$$

iii)

$$\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y).$$

iv)

$$\begin{aligned}|\sin(z)|^2 &= \sin^2(x)\cosh^2(y) + \cos^2(x)\sinh^2(y)\\ &= \sin^2(x)(1 + \sinh^2(y)) + (1 - \sin^2(x))\sinh^2(y)\\ &= \sin^2(x) + \sinh^2(y).\end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}\sin^2(z) + \cos^2(z) &= \frac{1}{4i^2}(e^{iz} - e^{-iz})^2 + \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})^2\\ &= \frac{-1}{4}(e^{2iz} + e^{-2iz} - 2e^{iz}e^{-iz}) + \frac{1}{4}(e^{2iz} + e^{-2iz} + 2e^{iz}e^{-iz})\\ &= \frac{2+2}{4} = 1.\end{aligned}$$

Also stimmt die erste Gleichung. Die Funktion sin ist unbeschränkt auf $\mathbb{C}$ (aber natürlich beschränkt auf $\mathbb{R}$). Dies folgt aus iv). Damit kann die zweite Gleichung auch nicht richtig sein.

Aufgabe H3 (Riemann-Integrierbarkeit) (4 Punkte)

Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, wie folgt definiert: Falls $x \notin \mathbb{Q}$, dann sei $f(x) = 0$. Falls $x \in \mathbb{Q}$ und $x = \frac{p}{q}$ die eindeutige Darstellung von x mit teilerfremden Zahlen $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ ist, sei $f(x) = q^{-1}$. Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist.

Lösung: Wir wollen den Satz auf Seite 171 im Skript zur Integrationstheorie anwenden. Jede Untersumme der Funktion ist offensichtlich Null. Wir müssen zeigen, dass für jedes $\epsilon > 0$ eine Partition P_ϵ von $[0,1]$ existiert, sodass $U(P_\epsilon, f) < \epsilon$.

Für $\epsilon \geq 1$ ist nichts zu tun. Sei also $1 > \epsilon > 0$. Dann ist die Menge $M_\epsilon := \{y \in [0,1] \colon f(y) > \epsilon/3\}$ endlich und habe $N+1$ Elemente. Wir können diese ordnen und indizieren, sodass $M_\epsilon = \{y_0, \ldots, y_N\}$, wobei $y_0 = 0$ und $y_N = 1$. Wir haben $d_\epsilon := \frac{1}{3}\min\{|x-y| \colon x, y \in M_\epsilon\} > 0$, da nur endlich viele x und y in Frage kommen. Sei nun $\delta_\epsilon := \min\{d_\epsilon, \frac{\epsilon}{6(N+1)}\}$. Wir definieren nun folgendermaßen eine Partition:

$$\begin{aligned}
x_0 &= y_0 = 0, \\
x_{2k} &= y_k - \delta_\epsilon, \quad k \in \{1, \ldots, N\}, \\
x_{2k+1} &= y_k + \delta_\epsilon, \quad k \in \{0, \ldots, N-1\}, \\
x_{2N+1} &= y_N = 1.
\end{aligned}$$

Weil $\delta_\epsilon \leq d_\epsilon$ folgt, dass $x_j \leq x_{j+1}$ für alle $j \in \{0, \ldots, 2N\}$. Die Obersumme zu dieser Funktion lässt sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
U(P_\epsilon, f) &= \sum_{i=1}^{2N+1} M_i \Delta x_i \\
&= \sum_{k=1}^{N} M_{2k} \Delta x_{2k} + \sum_{k=0}^{N} M_{2k+1} \Delta x_{2k+1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} \frac{\epsilon}{3} \Delta x_{2k} + \sum_{k=0}^{N} 1 \cdot 2\delta_\epsilon \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + (N+1)\frac{2\epsilon}{(N+1)6} = \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Die sind Abschätzung ist gerechtfertigt, da die Funktion f auf den Intervallen $[x_{2k+1}, x_{2k+2}]$ beschränkt ist durch $\epsilon/3$ und die Gesamtlänge dieser Intervalle natürlich nicht größer als 1 ist. Darüberhinaus ist f auf jedem Intervall $[x_{2k}, x_{2k+1}]$ beschränkt durch 1. Diese Intervalle haben gerade die Länge $2\delta_\epsilon$.

Dies beweist die Riemann-Integrierbarkeit der Funktion f.