Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Farwig
Raphael Schulz, Felix Riechwald

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
30. Januar 2009

12. Übungsblatt zur „Analysis I (deutsch)"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Konvergenzbegriffe) (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für eine Folge beschränkter Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, die gleichmäßig konvergiert, die Grenzfunktion f wiederum beschränkt ist. Dies ist bei punktweiser Konvergenz im Allgemeinen falsch.
Gebe ein Beispiel für eine Folge beschränkter Funktionen an, die punktweise konvergiert, deren Grenzfunktion aber nicht beschränkt ist.
Andererseits gilt aber die folgende Aussage: Falls die Funktionenfolge $(f_n)_n$ gleichmäßig beschränkt ist (das heißt, es existiert ein $K > 0$ mit $|f_n(x)| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in D$) und falls f_n punktweise (nicht notwendigerweise gleichmäßig) konvergiert, dann ist auch die Grenzfunktion f beschränkt durch die selbe Konstante K. Beweise diese Aussage.

Lösung: Ein Beispiel ist etwa $f_n(x) = \min\{x, n\}$ es gibt aber beliebig viele ebenso einfache und vielleicht noch anschaulichere Beispiele. Es ist klar, dass f_n beschränkt ist durch n und punktweise gegen die unbeschränkte Funktion $f(x) = x$ konvergiert. Denn für festes x wählen wir $N \geq x$ und erhalten für alle $n \geq N$, dass $f_n(x) = x$. Konsequenterweise konvergiert die reelle Folge $(f_n(x))_n$ gegen $f(x)$.
Um die zweite Aussage zu beweisen, betrachte

$$|f(x)| = |\lim_n f_n(x)| = \lim_n |f_n(x)| \leq \lim_n K = K.$$

Diese Abschätzung ist für jedes $x \in D$ richtig. Also ist f beschränkt durch K.

Aufgabe G2 (Potenzreihen)

Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen. Konvergieren die Reihen in i) bis iii) auch auf den Randpunkten des Konvergenzkreises?

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} x^k$

iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^k}{5+(-1)^{k+1}}\right)^k x^k$

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{(-1)^k k^2} x^k$

Lösung:

i) Wir haben $\limsup_k \sqrt[k]{|2^k/k!|} = 2\limsup_k(\sqrt[k]{k!})^{-1} = 0$, also ist der Konvergenzradius $r = \infty$ und die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) Es gilt $\limsup_k \sqrt[k]{|2^k/k^2|} = 2/(\limsup_k \sqrt[k]{k}^2) = 2$. Damit ist der Konvergenzradius $r = \frac{1}{2}$. Für die Randpunkte $x = \pm\frac{1}{2}$ konvergiert die Reihe ebenso.

iii) Wir haben: $\frac{2+(-1)^k}{5+(-1)^{k+1}} = \frac{1}{6}$ für ungerade k und $\frac{2+(-1)^k}{5+(-1)^{k+1}} = \frac{3}{4}$ für k gerade. Damit ist der Konvergenzradius $r = \frac{4}{3}$. Natürlich konvergiert die Reihe nicht auf den Randpunkten des Konvergenzbereiches, da keine Nullfolgen vorliegen.

iv) Es gilt

$$\limsup_k \sqrt[k]{\left|\left(1+\frac{1}{k}\right)^{(-1)^k k^2}\right|} = \limsup_k \left(1+\frac{1}{k}\right)^{(-1)^k k} = e.$$

Damit ist der Konvergenzradius $r = 1/e$.

Aufgabe G3 (Potenzreihen)

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ Potenzreihen mit Konvergenzradien r_1 und r_2. Wir nehmen an, $r_1 \leq r_2$.

i) Zeige: Der Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k x^k$ erfüllt $r \geq r_1 r_2$. Überlege ein Beispiel, in dem $r > r_1 r_2$ gilt.

ii) Zeige: Der Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)x^k$ ist $r = r_1$, falls $r_1 < r_2$. Was ist mit dem Fall $r_1 = r_2$? Gilt dann automatisch die Gleichheit $r = r_1 = r_2$?

Lösung:

i) Wir rechnen

$$\frac{1}{r} = \limsup_k \sqrt[k]{|a_k b_k|} \leq \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}\limsup_k \sqrt[k]{|b_k|} = \frac{1}{r_1 r_2}$$

und erhalten $r \geq r_1 r_2$. Ein Beispiel für die echte Ungleichung wäre

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 1, & \text{für } k \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad b_k = \begin{cases} 1, & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

mit $r_1 = r_2 = 1$ und $r = \infty$.

ii) Wir nehmen an, $r_1 < r_2$. Für alle x mit $|x| < r_1$ gilt dann, dass sowohl $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ als auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ absolut konvergiert. Damit ist (nach Umordnung) auch $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)x^k$ für alle solche x absolut konvergent. Also gilt $r \geq r_1$. Für alle x mit $r_1 < x < r_2$ gilt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)x^k$ divergiert als Summe einer konvergenten und einer divergenten Reihe. Also kann r nicht echt größer sein als r_1. Es folgt $r_1 = r$.

Sei nun $r_1 = r_2$. Dann kann r auch echt größer sein als r_1. Zum Beispiel mit $a_k = 1$ für alle k und $b_k = -1$ für alle k. Dann ist offensichtlich $r = \infty$ und $r_1 = r_2 = 1$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvergenzbegriffe)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(x) = 0$ für alle $x \notin [-1, 1]$. Der Einfachheit halber und um Fallunterscheidungen zu vermeiden, nehmen wir an, dass f nicht identisch Null ist.
Konvergieren die folgenden Funktionenfolgen gleichmäßig, punktweise oder gar nicht?

- $f_n(x) := f(x - n)$,
- $g_n(x) := f(x)/n$,
- $h_n(x) := f(x/n)$,
- $k_n(x) := f(nx)$,

$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Was ist die jeweilige Grenzfunktion, falls sie existiert?

Lösung: Die Folge f_n konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion, aber nicht gleichmäßig, da $\|f_n\| = \|f\| > 0$ für alle n.
Die Folge g_n konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion, denn es gilt $\|g_n\| = \|f\|/n \to_{n\to\infty} 0$.
Die Folge h_n konvergiert punktweise gegen die Konstante $f(0)$. Dies beweist man wie folgt: Sei $x \in \mathbb{R}$ und sei $\epsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass $|h_n(x) - f(0)| < \epsilon$ für genügend große n. Wegen der Stetigkeit von f im Punkte 0 existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(y) - f(0)| < \epsilon$ für alle $|y| < \delta$. Für alle $n > |x|/\delta$ gilt nun, dass $|x/n| < \delta$ und also

$$|h_n(x) - f(0)| = |f(x/n) - f(0)| < \epsilon,$$

was die Behauptung beweist. Unsere Wahl von n hing wesentlich von der Stelle x ab, was darauf hinweist, dass die Konvergenz nur punktweise ist. Dies ist aber kein Beweis. Um zu sehen, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig ist, betrachte man zunächst den Fall $f(0) \neq 0$. Selbst für große n finden wir große x sodass $h_n(x) = 0$. Also ist $\|h_n - f(0)\| \geq |f(0)| > 0$ und es kann keine gleichmäßige Konvergenz vorliegen. Für den anderen Fall $f(0) = 0$ beachte $\|h_n - f(0)\| = \|h_n\| = \|f\| > 0$ und wieder kann die Konvergenz nicht gleichmäßig gewesen sein.
Die Folge k_n konvergiert in $x = 0$, denn es gilt $\lim_n k_n(0) = \lim_n f(0) = f(0)$. Für $x \neq 0$ gilt für $n > 1/|x|$, dass $k_n(x) = f(nx) = 0$ und also konvergiert $k_n(x)$ gegen Null für $x \neq 0$. Damit ist die Folge punktweise konvergent und ihre Grenzfunktion ist unstetig, falls $f(0) \neq 0$. Damit kann keine gleichmäßige Konvergenz vorliegen. Im Falle $f(0) = 0$ ist die Grenzfunktion die Nullfunktion, und also stetig. Trotzdem ist die Konvergenz auch in diesem Falle nicht gleichmäßig, denn es gilt $\|k_n - 0\| = \|k_n\| = \|f\| > 0$.

Aufgabe H2 (Potenzreihen und Ableitungen) (4 Punkte)

i) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ und finde eine einfache Darstellung (ohne Reihe) für diese Funktion.
ii) Bestimme alle Ableitungen der Funktion $f(x) := \frac{1}{1+x^3}$ in $x_0 = 0$.

Lösung:

i) Der Konvergenzradius ist $r = (\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k})^{-1} = 1$.

Da Potenzreihen gliedweise abgeleitet werden dürfen (siehe Satz auf Seite 148 im Skript), gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = x\sum_{k=1}^{\infty}(x^k)' = x\sum_{k=0}^{\infty}(x^k)'$$
$$= x\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Man vergleiche auch die Aufgabe H3(c) vom zweiten Übungsblatt.

ii) Die Ableitungen per Hand auszurechnen ist sehr viel Arbeit. Leichter lassen sich alle Ableitungen (in einem Punkt) aus der Potenzreihendarstellung der Funktion ablesen. Mit der geometrischen Reihe haben wir

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^3)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{3k}.$$

Wir müssen noch die Koeffizienten a_k bestimmen, um f in Standardform für Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ zu erhalten.
Diese sind gerade:

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ nicht durch 3 teilbar,} \\ (-1)^{k/3} & \text{für } k \text{ durch 3 teilbar.} \end{cases}$$

Anders geschrieben:

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ nicht durch 3 teilbar,} \\ 1 & \text{für } k \text{ durch 3 und durch 2 teilbar,} \\ -1 & \text{für } k \text{ durch 3, aber nicht durch 2 teilbar.} \end{cases}$$

Nun gilt mit dem Satz auf Seite 148 im Skript

$$f^{(k)}(0) = \sum_{j=k}^{\infty} k(k-1)\dots(k-j+1)a_j 0^{j-k} = k!a_k,$$

und die gesuchten Ableitungen sind also:

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ nicht durch 3 teilbar,} \\ k! & \text{für } k \text{ durch 3 und durch 2 teilbar,} \\ -k! & \text{für } k \text{ durch 3, aber nicht durch 2 teilbar.} \end{cases}$$

Aufgabe H3 (Tschebyscheff-Polynome) (4 Punkte)

Auf $[-1,1]$ seien die folgenden Funktionen gegeben:

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x)), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Diese heißen *Tschebyscheff-Polynome.*

i) Zeige folgende Rekursionsformel:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

ii) Berechne $T_n(x)$ für $n \in \{1, \ldots, 5\}$.

iii) Zeige, dass die Funktionen T_n tatsächlich Polynome sind. Welchen Grad hat T_n? Sind die T_n gerade bzw. ungerade Funktionen?

iv) Bestimme alle Nullstellen von T_n in $[-1, 1]$.

v) Zeige, dass der Wertebereich durch -1 nach unten und durch 1 nach oben beschränkt ist. Finde alle lokalen Extrema von T_n.

Lösung:

i) Offensichtlich ist $T_0(x) = \cos(0) = 1$ und $T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$. Es gilt außerdem nach den Additionstheoremen:

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

für alle α, β, und also auch

$$\cos(\alpha + \beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha - \beta).$$

Setzen wir nun $\alpha = (n+1)\arccos(x)$ und $\beta = \arccos(x)$, folgt, dass

$$\begin{aligned} T_{n+2}(x) &= \cos((n+2)\arccos(x)) \\ &= 2\cos((n+1)\arccos(x))\cos(\arccos(x)) - \cos(n\arccos(x)) \\ &= 2xT_{n+1}(x) - T_n(x). \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned}$$

iii) Da T_0 und T_1 Polynome sind, folgt mit Induktion und der Rekursionsformel, dass T_n für alle n ein Polynom ist. Der Grad des Polynoms T_n ist gerade n, denn diese Aussage ist wahr für $n = 0$ und $n = 1$. Für alle größeren n folgt dies nach Induktion, denn wenn T_{n+1} ein Polynom vom genauen Grade $n+1$ und T_n ein Polynom vom genauen Grade n ist, sieht man in der Rekursionsformel, dass T_{n+2} den genauen Grad $n+2$ hat.

Offensichtlich ist T_0 gerade und T_1 ungerade. Aus der Rekursionsformel folgt mit Induktion, dass dann auch T_n gerade ist, falls n gerade ist und dass T_n ungerade ist, falls n ungerade ist.

iv) Wir haben $0 = T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ genau dann wenn $n \arccos(x)$ eine Nullstelle von cos ist. Die Nullstellen von cos auf dem Wertebereich $[0, n\pi]$ von $n \arccos(x)$ sind gerade die Stellen $\frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Also sind die Nullstellen von $T_n(x)$ genau die Stellen x_k mit $n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Damit erhalten wir als Nullstellen $x_k = \cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

v) Die Beschränktheit des Wertebereichs ist klar, da der Wertebereich von cos schon durch -1 und 1 beschränkt ist.

Ein lokales Extremum von T_n liegt in x genau dann vor, wenn $n \arccos(x)$ lokales Extremum von cos ist. (Dies hat streng genommen mit der Stetigkeit und strengen Monotonie von $n \arccos$ zu tun.) Lokale Maxima von cos sind genau die Punkte $2k\pi$ mit $k \in \{0, \dots, [n/2]\}$. Also sind die lokalen Maxima x_k von T_n, genau die Punkte mit $n \arccos(x_k) = 2k\pi$ oder $x_k = \cos(\frac{2k}{n}\pi)$. Lokale Minima von cos sind $(2k+1)\pi$, $k \in \{0, \dots, [(n-1)/2]\}$. Also ergeben sich als Minimalstellen von T_n die Punkte y_k mit $n \arccos(y_k) = (2k+1)\pi$ oder $y_k = \cos(\frac{2k+1}{n}\pi)$.

Alternativ kann natürlich auch T_n zweimal abgeleitet werden und Nullstellen der ersten Ableitung bestimmt werden etc. Allerdings muss man sich dann noch über die Randpunkte -1 und 1 Gedanken machen.