Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Farwig
Raphael Schulz, Felix Riechwald

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
16. Januar 2008

11. Übungsblatt zur „Analysis I (deutsch)"

Gruppenübung

Aufgabe G0 (Minitest Stetigkeit)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Gebe zu jeder Aussage auch ihre Negation an.

- ☐ Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
- ☒ Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit Grenzwert $a \in D$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.
- ☐ Es existiert ein Punkt $a \in D$ und ein Punkt $b \in D$, so dass $f(a) = \inf\{f(x)\colon x \in D\}$ und $f(b) = \sup\{f(x)\colon x \in D\}$. (Also nimmt f sein Maximum und Minimum an.)

Lösung: Richtig ist nur die zweite Aussage.
Die erste Aussage ist gerade die Definition von gleichmäßiger Stetigkeit und ist deshalb im Allgemeinen falsch. Die Negation ist: Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ Punkte $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ existieren, so dass $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$.
Die zweite Aussage ist gerade Folgenstetigkeit und ist sogar äquivalent zur Stetigkeit. Ihre Negation: Es gibt eine konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit Grenzwert $a \in D$, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$.
Die dritte Aussage ist im Allgemeinen falsch. Sie ist aber zum Beispiel richtig, wenn D kompakt ist. Die Negation: Für alle $a \in D$ und $b \in D$ gilt $f(a) \neq \inf\{f(x)\colon x \in D\}$ oder $f(b) \neq \sup\{f(x)\colon x \in D\}$.

Aufgabe G1 (Funktionenfolge)

Untersuchen sie die Funktionenfolge

$$f_n(x) = e^{-nx}, \qquad x \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N},$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Lösung: Für jedes feste $x \in (0,1]$ gilt $-nx \to -\infty$ für $n \to \infty$ und also $\lim_{n\to\infty} e^{-nx} = 0$. Für $x = 0$ haben wir $\lim_{n\to\infty} e^{-n\cdot 0} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Also konvergiert die Funktionenfolge punktweise gegen

$$f(x) := \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, denn bei gleichmäßiger Konvergenz stetiger Funktionen ist die Grenzfunktion wiederum stetig (siehe Satz auf Seite 138 im Skript). In unserem Beispiel aber konvergiert die Funktionenfolge stetiger Funktionen gegen eine unstetige Funktion und damit kann also die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

Aufgabe G2 (De l'Hospital'sche Regel)
Die Funktion $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert als $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Bestimme die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} x^{-2}(\cosh(x) - 1)$

(b) $\lim_{x\to 5}(6 - x)^{\frac{1}{x-5}}$

Lösung:

(a) Zweimalige Anwendung der de l'Hospital'schen Regel ergibt:

$$\lim_{x\to 0} x^{-2}(\cosh(x) - 1) = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Hier schreiben wir zunächst $(6-x)^{\frac{1}{x-5}}$ als $\exp(\log(6-x)\frac{1}{x-5})$ wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt also $\lim_{x\to 5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}} = \exp(\lim_{x\to 5} \frac{\log(6-x)}{x-5})$. Den Limes im Argument bestimmen wir mit de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 5} \frac{\log(6-x)}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{-(6-x)^{-1}}{1} = -1,$$

also gilt $\lim_{x\to 5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}} = \exp(-1) = \frac{1}{e}$.

Aufgabe G3 (Konvexe Funktionen)
Zeige die Ungleichung

$$\log(x+y) \leq \frac{x\log x + y\log y}{x+y} + \log 2$$

für alle $x, y > 0$. Hinweis: Betrachte die Funktion $x \mapsto x\log x$.

Lösung: Die Funktion $x \mapsto x\log x$ ist konvex, denn ihre zweite Ableitung $\frac{1}{x}$ ist positiv (siehe Skript). Es gilt also (mit $\lambda = \frac{1}{2}$) die Ungleichung

$$(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)\log(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \leq \frac{1}{2}x\log x + \frac{1}{2}y\log y$$

und also auch

$$\log((x+y)/2) \leq \frac{x\log x + y\log y}{x+y}$$

und daraus folgt die Behauptung.

Hinweis:

Am nächsten Freitag, dem 23. Januar, findet die Probeklausur statt. Die Übungen um 8:00 und um 13:30 fallen an diesem Tag aus. Um die Probeklausur mitzuschreiben, sollten die Studenten einen der Übungstermine um 9:50 oder 11:40 wahrnehmen.
Die Hausübungen auf dem vorliegenden Übungsblatt sind innerhalb von zwei Wochen zu bearbeiten und erst am 30. Januar abzugeben.

Hausübung

Aufgabe H1 (Grenzwerte) (4 Punkte)

(a) Bestimme die folgenden Grenzwerte:

i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\log x}$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x^2)-1+x^2}{x^4}$

(b) Wo steckt der Fehler in der Anwendung der l'Hospital'schen Regel?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-2}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

Wie lautet der richtige Grenzwert?

Lösung:

(a) i) Zweimal de l'Hospital liefert:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\log x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\log x)-1}{-1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{x-1}+x^x(1+\log x)^2}{\frac{-1}{x^2}} = -2.$$

ii) Viermalige Anwendung der de l'Hospital'schen Regel liefert:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x^2)-1+x^2}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x^2)(-2x)+2x}{4x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x^2)(4x^2-2)+2}{12x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x^2)(-8x^3+12x)}{24x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x^2)(16x^3-48x^2+12)}{24} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(b) Der Fehler ist, dass bei der zweiten Anwendung der de l'Hospital'schen Regel die Limites in Zähler und Nenner nicht null waren, sondern 1 und 2. Damit ergibt sich der Grenzwert $\frac{1}{2}$ und nicht 3.

Aufgabe H2 (Konvexe Funktionen) (4 Punkte)

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

(a) Sei außerdem $g\colon I \to \mathbb{R}$ konvex. Zeige, dass $f + g$ konvex ist.

(b) Sei nun $g\colon J \to I$ konvex und f zusätzlich monoton wachsend. Zeige, dass $f \circ g\colon J \to \mathbb{R}$ konvex ist.

(c) Seien $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ zwei relative Minima der konvexen Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$. Zeige $f(x_1) = f(x_2)$.

Lösung:

(a) Sei $\lambda \in [0, 1]$ und $a, b \in I$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda a + (1-\lambda)b) &= f(\lambda a + (1-\lambda)b) + g(\lambda a + (1-\lambda)b)\\ &\le \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) + \lambda g(a) + (1-\lambda)g(b)\\ &= \lambda(f+g)(a) + \lambda(f+g)(b)\end{aligned}$$

und dies beweist die Behauptung.

(b) Mit $\lambda \in [0, 1]$ gilt wegen der Konvexität von g und der Monotonie von f

$$f(g(\lambda a + (1-\lambda)b)) \le f(\lambda g(a) + (1-\lambda)g(b)).$$

Wegen der Konvexität von f gilt außerdem

$$f(\lambda g(a) + (1-\lambda)g(b)) \le \lambda f(g(a)) + (1-\lambda)f(g(b)).$$

(c) Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen also an, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$. Wir nehmen außerdem an, dass $f(x_1) > f(x_2)$, der andere Fall geht ähnlich.

Wir können jedes y mit $x_1 < y < x_2$ schreiben als $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, wobei

$$\lambda_1 := \frac{x_2 - y}{x_2 - x_1} \text{ und } \lambda_2 := \frac{y - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Es gilt $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ und $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Also gilt wegen der Konvexität von f

$$f(y) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_1) = f(x_1).$$

Damit ist für alle y zwischen x_1 und x_2 gezeigt, dass $f(y) < f(x_1)$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass x_1 ein relatives Minimum ist, da dann für y in einer Umgebung von x_1 gelten muss $f(y) \ge f(x_1)$.

Aufgabe H3 (Funktionenreihe) (4 Punkte)

Untersuche die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + \frac{1}{x^n}), \qquad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Falls die Reihe konvergiert: Ist die dadurch gegebene Funktion stetig? Ist sie differenzierbar? Gebe gegebenenfalls die Ableitung an.

Lösung: Der Schlüssel zur Lösung der Aufgabe ist der Satz auf Seite 142 im Skript, das Weierstraß'sche Majorantenkriterium für Funktionenreihen, auch *Weierstraß M-Test* genannt. Wir schätzen für alle $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ab:

$$\left|\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + \frac{1}{x^n})\right| \leq \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(2^n + \frac{1}{(1/2)^n}) = \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(2^n + 2^n) = \frac{n^2}{\sqrt{n!}}2^{n+1}.$$

Zur Abkürzung schreiben wir nun $c_n := \frac{n^2}{\sqrt{n!}}2^{n+1}$ und müssen nur noch zeigen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert, dann folgt mit dem oben genannten Satz die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe. Wir benutzen hierfür das Quotientenkriterium und sehen dass

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0 < 1,$$

für $n \to \infty$. Daraus folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert und wir haben bewiesen, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert. Also konvergiert sie auch punktweise. Des weiteren ist die durch die Reihe definierte Funktion stetig als Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Reihe stetiger Funktionen. (Satz auf Seite 138 im Skript)
Um festzustellen, ob die Grenzfunktion differenzierbar ist, müssen wir überlegen, ob die Folge der Ableitungen gleichmäßig konvergiert (um dann den Satz auf Seite 143 anzuwenden). Es gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + \frac{1}{x^n})\right)' = \sum_{n=0}^{N} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + \frac{1}{x^n})' = \sum_{n=1}^{N} \frac{n^3}{\sqrt{n!}}(x^{n-1} - x^{-n-1}),$$

und die Frage ist also, ob diese Reihe konvergiert. Um dies zu beweisen, kommt wieder der Weierstraß M-Test zum Zuge. Wir schätzen wieder ab:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^3}{\sqrt{n!}}(x^{n-1} - x^{-n-1})\right| &\leq \frac{n^3}{\sqrt{n!}}(|x|^{n-1} + |x|^{-n-1}) \\
&\leq \frac{n^3}{\sqrt{n!}}(2^{n-1} + 2^{n+1}) \\
&\leq \frac{n^3}{\sqrt{n!}}(2^{n+1} + 2^{n+1}) \\
&\leq \frac{n^3}{\sqrt{n!}}2^{n+2} =: c'_n
\end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n$ konvergiert wie oben mit dem Quotientenkriterium. Also konvergiert die Folge der Ableitungen nach dem M-Test gleichmäßig und zwar gegen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n!}}(x^{n-1} - x^{-n-1})$. Nach dem Satz auf Seite 143 ist also die durch die in der Aufgabe gegebene Reihe definierte Funktion differenzierbar und hat die Ableitung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n!}}(x^{n-1} - x^{-n-1})$.