Analysis I für M, LaG, Ph

10. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G1 Differentiation I

Die Funktion $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

und heißt *Cosinus Hyperbolicus*. Auf $(0, \infty)$ besitzt cosh eine Umkehrfunktion arcosh : $(1, \infty) \to (0, \infty)$, diese nennt man *Areacosinus Hyperbolicus*. Man zeige die Darstellung

$$\text{arcosh }(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Differenziere die folgenden Funktionen auf passenden Definitionsbereichen:

$$\cosh(x), \qquad \text{arcosh }(x), \qquad \sqrt[x]{x}, \qquad x^{\log x}.$$

Sei $y = \cosh(x)$ für ein $x \in (0, \infty)$. Wir substituieren $\xi := e^x$ und erhalten $y = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)$. Auflösen nach ξ ergibt nun $\xi = y + \sqrt{y^2 - 1}$. Daraus erhalten wir die gesuchte Darstellung

$$\text{arcosh}(y) = x = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Die Funktion cosh *ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung ist*

$$\left(\cosh\right)'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) =: \sinh(x).$$

Die Ableitung des Cosinus Hyperbolicus nennt man Sinus Hyperbolicus.
Die Ableitung des Areacosinus Hyperbolicus bestimmen wir auf zwei verschiedene Weisen. Zunächst über die oben bewiesene Darstellung. Sei also $x \in (1, \infty)$. Dann ergibt sich für die Ableitung:

$$\left(\text{arcosh}\right)'(x) = \left(\log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right)'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{x^2 + x\sqrt{x^2 - 1} - 1}.$$

Verwenden wir allerdings die Ableitung über die Umkehrfunktion (s. Satz im Skript, Seite 111) so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\left(\text{arcosh}\right)'(x) &= \frac{1}{\left(\cosh\right)'\left(\text{arcosh } x\right)} = \frac{1}{\sinh(\text{arcosh } x)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 - 1} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + x\sqrt{x^2 - 1} - 1}.\end{aligned}$$

Nun bestimmen wir die Ableitung von $\sqrt[x]{x}$ für alle $x > 0$. Die angegebene Funktion ist definiert durch die Darstellung $\sqrt[x]{x} = e^{\frac{1}{x}\log(x)}$. Damit gilt für die Ableitung dieser Funktion:

$$\left(\sqrt[x]{x}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\log(x)}\right)' = \left(-\frac{1}{x^2}\log(x) + \frac{1}{x}\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}\log(x)} = (1 - \log(x))\frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}.$$

Für alle $x > 0$ haben wir $x^{\log(x)} = e^{\log^2(x)}$ und daher

$$\left(x^{\log(x)}\right)' = \left(e^{\log^2(x)}\right)' = 2\log(x) \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{\log^2(x)} = \frac{2\log(x)}{x}x^{\log(x)}.$$

G2 Mittelwertsatz

Beweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für alle $x \in (0, \infty)$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\log x \leq x - 1.$$

Zunächst sei $x \in (1, \infty)$. Mithilfe des Mittelwertsatzes (s. Satz im Skript, Seite 118) existiert ein $\xi \in (1, x)$, so dass

$$\frac{\log x}{x-1} = \frac{\log x - \log 1}{x-1} = \frac{1}{\xi} < 1.$$

Damit folgt die Behauptung für alle $x \in (1, \infty)$. Für $x = 1$ ist die Aussage ohnehin trivial. Sei nun $x \in (0, 1)$. Dann gibt es ein $\xi \in (x, 1)$, so dass

$$\frac{\log x - \log 1}{x-1} = \frac{1}{\xi} > 1.$$

Hieraus erhalten wir für alle $x \in (0, 1)$

$$\log x < x - 1.$$

G3 Leibniz'sche Formel

Sei $D \subset \mathbb{R}$, ferner seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen. Beweise die *Leibniz'sche Formel*

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Diese Formel verallgemeinert die Produktregel.
(Hinweis: Es gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ für $k \geq 1$.)

Den Beweis führen wir mit vollständiger Induktion. Für $n = 1$ gilt $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(1-k)}(x) g^{(k)}(x)$.
Die Induktionsvoraussetzung (I.V.) sei, dass die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. Wir führen nun den Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)}(x) &= \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)^{(n)} \\
&= \text{(I.V.)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f')^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) (g')^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + f(x) g^{(n+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + f(x) g^{(n+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).
\end{aligned}$$

Hausübung

H1 Kettenregel II (4 Punkte)

Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Beweise, dass

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}$$

für alle $x \in (0, \infty)$ gilt.

Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion. Für $n = 1$ ist die Gleichung offensichtlich richtig:

$$\left(f(\frac{1}{x})\right)' = -\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x}).$$

Angenommen die Gleichung gilt für $k \leq n$. Wir werden die Geichung nun für $n+1$ nachweisen. Wir haben

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1}\left(x^n f(\frac{1}{x})\right)^{(n+1)} &= (-1)^{n+1}\left(\left(x^n f(\frac{1}{x})\right)'\right)^{(n)} \\ &= (-1)^{n+1} n \left(x^{n-1} f(\frac{1}{x})\right)^{(n)} - (-1)^{n+1} n \left(x^{n-2} f'(\frac{1}{x})\right)^{(n)} \\ &= -\frac{n}{x^{n+1}} f^{(n)}(\frac{1}{x}) - (-1)^{n-1}\left(x^{n-2} f'(\frac{1}{x})\right)^{(n)}.\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Induktionshypothese auf f' gilt für den letzten Term

$$(-1)^{n-1}\left(x^{n-2} f'(\frac{1}{x})\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\left(\left(x^{n-2} f'(\frac{1}{x})\right)^{(n-1)}\right)' = \left(\frac{1}{x^n} f^{(n)}(\frac{1}{x})\right)'.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1}\left(x^n f(\frac{1}{x})\right)^{(n+1)} &= -\frac{n}{x^{n+1}} f^{(n)}(\frac{1}{x}) - \left(\frac{1}{x^n} f^{(n)}(\frac{1}{x})\right)' \\ &= \frac{1}{x^{n+2}} f^{(n+1)}(\frac{1}{x}).\end{aligned}$$

H2 Differentiation II (4 Punkte)

i) Die Funktion f sei differenzierbar in $[a, b]$ und für alle $x \in [a, b]$ gelte

$$|f(x)| + |f'(x)| \neq 0.$$

Beweise, dass f in $[a, b]$ nur endlich viele Nullstellen hat.

ii) Zeige die folgenden Ungleichungen mit Hilfe des Mittelwertsatzes:
   a) $e^a (b - a) < e^b - e^a < e^b (b - a)$ für $a < b$,
   b) $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}$ für alle $x > 0$.

i) Es sei $N_f := \{ x \in [a, b] |\ f(x) = 0 \}$ die Menge der Nullstellen von f in $[a, b]$. Wir nehmen an, N_f sei unendlich. Dann gibt es eine Teilmenge $\{ x_n |\ n \in \mathbb{N} \}$ von N_f mit paarweise verschiedenen Zahlen x_n. Da das Intervall $[a, b]$ kompakt ist, hat die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x_0 \in [a, b]$. Da die x_n paarweise verschieden sind, kann $x_{nk} = x_0$ für höchstens ein $k \in \mathbb{N}$ gelten.

Aus $f(x_n) = 0$ und der Stetigkeit von f folgt auch $f(x_0) = f(\lim_{k\to\infty} x_{nk}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{kn}) = 0$. Da f differenzierbar ist, folgt

$$f'(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_{nk}) - f(x_0)}{x_{nk} - x_0} = 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch zu $|f(x)| + |f'(x)| \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$!

ii) a) Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Funktion e^x liefert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^\xi.$$

Mit $e^a < e^\xi < e^b$ folgt die Ungleichung.

b) Wegen des Mittelwertsatzes, angewandt auf die Funktion $\sqrt{1+t}$ im Intervall $(0, x)$, gibt es ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x - 0} = \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} < \frac{1}{2}.$$

Damit folgt die Behauptung.

H3 Taylor-Polynom (4 Punkte)

i) Bestimme den minimalen Grad $n \in \mathbb{N}$ des Taylor-Polynoms der Funktion e^{-2x} mit Entwicklungspunkt 1, so dass sich das Taylor-Polynom und die Funktion e^{-2x} auf $(0, 2)$ höchstens um $0,1$ unterscheiden.

ii) Beschreibe die Funktion $\frac{1}{1-x}$ durch ihr Taylor-Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit Entwicklungspunkt 0 und zugehörigem Restglied.

i) Die Ableitungen der Funktion $g(x) := e^{-2x}$ sind

$$g'(x) = -2\cdot e^{-2x}, \quad g''(x) = 4\cdot e^{-2x}, \quad ..., \quad g^{(n)}(x) = \left((-2)^{n-1}e^{-2x}\right)' = (-2)^n e^{-2x}.$$

Nach der Taylor-Formel drückt das Restglied gerade den Fehler des Taylor-Polynoms zur approximierenden Funktion aus. Daher gilt

$$\begin{aligned}\left| e^{-2x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k \right| \le \left| \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} \right| &= \frac{2^{n+1}e^{-2\xi}}{(n+1)!}|x-1|^{n+1} \\ \le \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}e^{-2\cdot 0}|2-1|^{n+1} &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

für alle $x \in (0, 2)$. Wir wissen, dass die Folge $\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Für welche $n \in \mathbb{N}$ die Folgenglieder allerdings Werte kleiner oder gleich $0,1$ annehmen müssen wir jetzt noch nachrechnen. Dabei stellt sich heraus, dass $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{4}{15} > 0,1$ für $n = 4$ und $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{4}{45} < 0,1$ für $n = 5$. Somit ist 5 der minimale Grad für welchen wir einen Fehler kleiner als $0,1$ garantieren können.

ii) Wir untersuchen zunächst die Ableitungen der Funktion $f(x) := \frac{1}{1-x}$:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad ..., \quad f^{(n)}(x) = \left(\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}\right)' = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Somit haben wir $f^{(n)}(0) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Darstellung der Funktion f durch ein Taylor-Ploynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit Entwicklungspunkt 0 ist demnach

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{(1-\xi)^{n+2}}\end{aligned}$$

mit einem ξ zwischen 0 und $x \in \mathbb{R}$.

Zusatz Differentiation im Schnee (4 Punkte)

Zur Einstimmung auf ein besinnliches Weihnachtsfest seien hier Funktionen auf $(0, \infty)$ angegeben, die sich ganz leicht aus ein paar Schneeflocken konstruieren lassen:

$$f(\circledast) := \circledast^{(\circledast^{\circledast})} \quad \text{und} \quad g(\circledast) := (\circledast^{\circledast})^{\circledast}.$$

Wir wollen nun diese Schneeflocken-Funktionen genauer analysieren.

i) Bestimme die Ableitungen dieser Funktionen in der Variable $\circledast \in (0, \infty)$.

ii) Für welche $\circledast \in (0, \infty)$ ist f größer, kleiner bzw. gleich g?

iii) Dem Weihnachtsmann sind seine Rentiere entlaufen, nun muss er allein mit Hilfe der Schwerkraft seinen Schlitten bewegen. Er steht im Punkt $(0, g(0))$ und möchte sich entlang des Graphen von g von seinem Schlitten tragen lassen. Dabei wird der Schlitten an der Stelle $\circledast \in (0, \infty)$ beschleunigt, falls $g'(\circledast) < 0$, und abgebremst, falls $g'(\circledast) > 0$. Wie weit wird der Weihnachtsmann beschleunigt?

i) Die Funktionen f und g lassen sich auch darstellen durch

$$\begin{aligned} f(\circledast) &= \circledast^{(\circledast^{\circledast})} = \circledast^{e^{\circledast \log(\circledast)}} = e^{e^{\circledast \log(\circledast)} \cdot \log(\circledast)}, \\ g(\circledast) &= (\circledast^{\circledast})^{\circledast} = \circledast^{\circledast 2} = e^{\circledast^2 \log(\circledast)}. \end{aligned}$$

Als Ableitungen erhalten wir demnach

$$\begin{aligned} f'(\circledast) &= \left(\frac{1}{\circledast} + \log(\circledast)(\log(\circledast)+1)\right) \cdot e^{\circledast \log(\circledast)} \cdot e^{e^{\circledast \log(\circledast)} \cdot \log(\circledast)}, \\ g'(\circledast) &= (2 \circledast \log(\circledast) + \circledast) \cdot e^{\circledast^2 \log(\circledast)}. \end{aligned}$$

ii) Wir betrachten $\frac{f(\circledast)}{g(\circledast)} = \circledast^{(\circledast^{\circledast} - \circledast^2)}$. Sei zunächst $\circledast \in (1, \infty)$. So ist $\frac{f(\circledast)}{g(\circledast)} > 1$ genau dann, wenn $\circledast^{\circledast} - \circledast^2 > 0$. Das ist aber genau dann der Fall, falls $\circledast \in (2, \infty)$. Dagegen für $\circledast \in (1, 2)$ ist $\circledast^{\circledast} - \circledast^2 < 0$ und damit $\frac{f(\circledast)}{g(\circledast)} < 1$.

Nun sei $\circledast \in (0, 1)$. Wir haben $\frac{f(\circledast)}{g(\circledast)} < 1$ genau dann, wenn $\circledast^{\circledast} - \circledast^2 > 0$. Wegen $\circledast \in (0, 1)$ gilt diese Ungleichung, da $\circledast^2 < \circledast^{\circledast}$.

In den Sonderfällen $\circledast = 1$ und $\circledast = 2$ sieht man leicht die Gleichheit von f und g. Also gilt auf den Intervallen $(0, 1)$ und $(1, 2)$ die Ungleichung $f < g$. Aber auf $(2, \infty)$ haben wir $g < f$.

iii) Für alle $\circledast \in (0, \infty)$ ist $e^{\circledast^2 \log(\circledast)} > 0$. Es genügt demnach den Ausdruck $2\circledast \log(\circledast) + \circledast$ zu betrachten, um die Ableitung von g auf Vorzeichen zu untersuchen. Durch einfaches Nachrechnen sieht man nun, dass $2 \circledast \log(\circledast) + \circledast < 0$ für alle $\circledast \in (0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ und $2 \circledast \log(\circledast) + \circledast \geq 0$ für alle $\circledast \in [\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty)$. Der Weihnachtsmann wird somit bis zur Stelle $\circledast = \frac{1}{\sqrt{e}}$ beschleunigt.