Analysis I für M, LaG, Ph

9. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G1 Gleichmäßige Stetigkeit

Gegeben seien die Funktionen

$$f : (0,1] \to \mathbb{R},\ x \to \frac{1}{x^2} \quad \text{und} \quad g : [1,\infty) \to \mathbb{R}\,,\ x \to \frac{1}{x^2}.$$

Untersuche die Funktionen f und g auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.

Behauptung: Die Funktion f ist stetig.
Beweis: Sei $x \in (0,1]$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergierende Folge. Nach den Grenzwertsätzen (s. Satz aus dem Skript, Seite 56) erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n^2}$. Also ist die Funktion f stetig (s. Satz im Skript, Seite 96).

Behauptung: Die Funktion f ist nicht gleichmäßig stetig.
Beweis: Für $\varepsilon = 3$ finden wir für jedes $\delta > 0$ Werte x, y aus $(0,1]$, so daß zwar $|x-y| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$ ist.
Denn: Sei $\delta > 0$. Wähle $x < \min\{1,\delta\}$ und $y = \frac{x}{2}$. Dann ist $|x-y| = |\frac{x}{2}| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| = \left|\frac{3}{x^2}\right| > 3 = \varepsilon$.

Behauptung: Die Funktion g ist gleichmäßig stetig.
Beweis: Wir betrachten die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right| = \left|\frac{x^2 - y^2}{x^2 \cdot y^2}\right| \\ &= \frac{|x-y||x+y|}{x^2y^2} \le |x-y|\frac{x+y}{x^2 \cdot y^2} \le |x-y| \cdot 2 \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Setzt man $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, dann folgt aus obiger Abschätzung, daß $|g(x)-g(y)| < \varepsilon$ ist für alle x, y mit der Eigenschaft $|x-y| < \delta$.
Also ist die Funktion gleichmäßig stetig und somit auch stetig.

G2 Differentiation und Betragsfunktion

i) Differenziere die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x|x|$.
ii) Betrachte die Funktion $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_k(x) := |x|^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist g_k differenzierbar. Bestimme die Ableitung von g_k.
iii) Gibt es nicht-differenzierbare Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $|h|$ differenzierbar ist?

i) Nach Definition des Betrages gilt

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \ge 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Für alle $x \ge 0$ haben wir also die Ableitung $f'(x) = 2x$ und für alle $x \le 0$ haben wir $f'(x) = -2x$. Es bleiben also nur noch links- und rechtsseitiger Grenzwert des

Differenzenquotienten an der Stelle 0 *zu untersuchen:*

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{x|x|}{x}=\lim_{x\to+0}|x|=\lim_{x\to+0}x=0,$$
$$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{x|x|}{x}=\lim_{x\to-0}|x|=\lim_{x\to-0}-x=0.$$

Wir haben daher $f'(0)=0$. *Die Funktion* f *ist also auf ganz* $\mathbb{R}$ *differenzierbar und es gilt* $f'(x)=2|x|$.

ii) *Zunächst stellen wir fest, dass*

$$g_k(x)=|x|^k=\begin{cases}x^k & \text{für } x\geq 0\\ (-x)^k & \text{für } x<0.\end{cases}$$

Daher gilt für gerade $k\in\mathbb{N}$, *dass* $g_k(x)=x^k$. *Es gilt* $g_k(0)=0$ *für alle* k. *Offensichtlich ist für alle* $k\in\mathbb{N}$ *die Funktion* g_k *für* $x>0$ *differenzierbar und es filt* $g_k'(x)=k\cdot x^{k-1}$. *Analog ist* g_k *für* $x<0$ *differenzierbar und es gilt* $g_k'(x)=(-1)^k\cdot k\cdot x^{k-1}$.
Wir berechnen für $k>1$

$$\lim_{x\to+0}\frac{g_k(x)-g_k(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{|x|^k}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{x^k}{x}=\lim_{x\to+0}x^{k-1}=0,$$
$$\lim_{x\to-0}\frac{g_k(x)-g_k(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{|x|^k}{x}=(-1)^k\lim_{x\to-0}\frac{x^k}{x}=(-1)^k\lim_{x\to-0}x^{k-1}=0.$$

Die Ableitung ist stetig in $x=0$ *für* $k>1$ *und* $g_k'(0)=0$.
Für $k=1$ *haben wir*

$$\lim_{x\to+0}\frac{g_1(x)-g_1(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to+0}1=1,$$
$$\lim_{x\to-0}\frac{g_1(x)-g_1(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}=-\lim_{x\to-0}\frac{x}{x}=-\lim_{x\to-0}1=-1.$$

Somit existiert der Limes in $x=0$ *nicht und* g_1 *ist in Null nicht differenzierbar.*

iii) *Ja, betrachte z.B. die Funktion* $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$h(x)=\begin{cases}1 & \text{für } x\geq 0\\ -1 & \text{für } x<0.\end{cases}$$

Diese Funktion ist in Null offensichtlich nicht differenzierbar (noch nicht mal stetig). Aber $|h|\equiv 1$ *ist beliebig oft differenzierbar mit der Ableitung* $h'(x)\equiv 0$.

G3 Kettenregel I

Sei die Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Für alle $x\in(a,b)$ gelte

$$f'(x)=g\left(f(x)\right).$$

Zeige, dass dann auch f beliebig oft differenzierbar ist.

Wir haben

$$f''(x)=g'(f(x))f'(x)=g'(f(x))g(f(x)),$$
$$f'''(x)=g''(f(x))\left(g(f(x))\right)^2+\left(g'(f(x))\right)^2g(f(x)).$$

Deshalb sind f'' *und* f''' *stetig auf* (a,b). *Man kann nun durch Induktion ganz analog zeigen, dass* $f^{(n)}$, $n\geq 3$, *Summen von Produkten von Ableitungen* $g^{(k)}(f)$, $k=0,1,...,n-1$ *sind. Demnach sind auch* $f^{(n)}$, $n\geq 3$, *stetig.*

Hausübung

H1 Exponentialfunktion/Logarithmus vs. Polynome (4 Punkte)
Vergleiche das asymptotische Verhalten der Exponentialfunktion bzw. des Logarithmus mit dem von Polynomen. Man zeige also

$$\lim_{x\to\infty} x^{-n}\exp(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{n}\exp(x) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{-n}\log(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x^{n}\log(x) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für alle $x > 0$ ist $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} > \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(n+1)!} = \infty.$$

Daraus erhalten wir weiter

$$\lim_{x\to-\infty} x^n \exp(x) = \lim_{y\to\infty} (-y)^n \exp(-y) = (-1)^n \lim_{y\to\infty} \frac{y^n}{\exp(y)} = 0.$$

Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine divergente Folge positiver Zahlen mit $\lim_{m\to\infty} x_m = \infty$. Setzen wir $y_m := n\log(x_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, so gilt weiter $\lim_{m\to\infty} y_m = \infty$. (Warum?)
Da $x_m^n = \exp(y_m)$, erhalten wir mit dem obigen Resultat

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log(x_m)}{x_m^n} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{n} y_m \exp(-y_m) = 0.$$

Dieses Ergebnis liefert uns nun auch

$$\lim_{x\to 0} x^n \log(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{\log(\frac{1}{x})}{(\frac{1}{x})^n} = \lim_{y\to\infty} -\frac{\log(y)}{y^n} = 0.$$

H2 Stetige Fortsetzung (4 Punkte)

i) Welche der Funktionen

$$e^{-\frac{1}{x}} \qquad \text{und} \qquad e^{-\frac{1}{x^2}}$$

lassen sich in Null stetig fortsetzen?

ii) Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *c-periodisch* mit einer reellen Konstanten $c > 0$, wenn $f(x + c) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht-konstante, stetige, c-periodische Funktion für ein $c > 0$. Lässt sich die Funktion $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(\frac{1}{x})$, in Null stetig fortsetzen?

i) Wir untersuchen zunächst $e^{-\frac{1}{x}}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (Beispielsweise $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$). Desweiteren sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge negativer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (Beispielsweise $(-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$). Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{x_n}} = 0 \neq \infty = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{y_n}}.$$

Demnach ist die Funktion $e^{-\frac{1}{x}}$ in Null nicht stetig fortsetzbar.
Nun betrachten wir $e^{-\frac{1}{x^2}}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n =$

0 (Beispielsweise $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$). Desweiteren sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge negativer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (Beispielsweise $(-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$). Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{x_n^2}} = 0 = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{y_n^2}}.$$

Die Funktion $e^{-\frac{1}{x^2}}$ lässt sich also in Null (mit dem Wert 0) stetig fortsetzen.

ii) *Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^*$ mit $f(x_0) \neq f(y_0)$. Nun definieren wir zwei divergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt:*

$$x_n := x_{n-1} + c = x_0 + nc, \qquad y_n := y_{n-1} + c = y_0 + nc.$$

Offensichtlich sind diese Folgen bestimmt divergent mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. D.h., Für ein $N \in \mathbb{N}$ sind alle Folgenglieder x_n und y_n mit $n \geq N$ ungleich Null. Die Folgen $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\frac{1}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sind also Nullfolgen. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} g(\frac{1}{x_n}) &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_0 + nc) = f(x_0)\\ &\neq f(y_0) = \lim_{n\to\infty} f(y_0 + nc) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} g(\frac{1}{x_n}).\end{aligned}$$

Demnach lässt sich eine solche Funktion g in Null nicht stetig fortsetzen.

H3 Differentiation und Umkehrfunktion (4 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x + \frac{1}{1+x^2}.$$

i) Zeige, daß f eine Umkehrfunktion g besitzt.

ii) Zeige, daß die Umkehrfunktion g differenzierbar ist, und berechne $g'(1)$ und $g''(1)$.

i) *Die Funktion f ist offensichtlich stetig differenzierbar und es gilt auf ganz $\mathbb{R}$*

$$f'(x) = 2 - \frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0.$$

Daher ist die Funktion f monoton und somit injektiv. Wegen der Beschränktheit von $\frac{1}{(1+x^2)}$ ist f surjektiv. Damit gibt es zu f eine Umkehrfunktion g.

ii) *Aus Aufgabenteil i) folgt, daß g differenzierbar ist (s. Satz im Skript, Seite 111) und es gilt mit $g(1) = 0$:*

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{2 - \frac{2\cdot 0}{(1+0^2)^2}} = \frac{1}{2}$$

sowie

$$g''(x) = \left(\frac{1}{f'(g(x))}\right)' = -\frac{g'(x) f''(g(x))}{(f'(g(x)))^2} = \frac{g'(x)\frac{1-3g(x)^2}{(1+g(x)^2)^3}}{2 - \frac{2g(x)}{(1+g(x)^2)^2}}.$$

Daher ist

$$g''(1) = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{2-0} = \frac{1}{4}.$$