Analysis I für M, LaG, Ph

7. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G1 Cauchy-Produkt

i) Sei $q \in (-1,1)$. Man finde eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $c_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n.$$

ii) Es sei $a_0 = -1, b_0 = 2, a_k = 1$ und $b_k = 2^k$ für $k \geq 1$. Zeige, dass die aus den Folgen $(a_n), (b_n)$ gebildeten Reihen jeweils divergieren, ihr Cauchy-Produkt jedoch nicht.

i) Wegen $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ absolut. Daher konvergiert auch das Cauchy-Produkt und wir erhalten:

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} q^{n-k}q^k = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{k=0}^{n} 1 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

Somit ist $(n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ die gesuchte Folge.

ii) Die Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ sind keine Nullfolgen, daher divergieren die entsprechenden Reihen. Für das Cauchy-Produkt erhalten wir allerdings mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k_l} b_l\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(2 + \sum_{l=1}^{k-1}(1\cdot 2^k) - 2^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(2 + \frac{1-2^k}{1-2} - 1 - 2^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(2 - 1 + 2^k - 1 - 2^k\right) = 0.\end{aligned}$$

G2 Topologie

i) Man zeige die folgenden Aussagen über innere Punkte:
   a) Sei x ein innerer Punkt der Menge M. Dann ist x auch Häufungspunkt von M.
   b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Die einelementige Menge $\{a\}$ hat keine inneren Punkte und keine Häufungspunkte.
   c) Die Mengen $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ haben keine inneren Punkte.

ii) Sind die Mengen $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ offen oder abgeschlossen?

iii) Ist die Menge $M = \{(-1)^n \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ offen oder abgeschlossen?

i) a) Da a innerer Punkt von M ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die Umgebung $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ganz in M enthalten ist. Sei nun $\delta > 0$ gegeben. Dann ist $x_\delta := \min\{a + \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\delta}{2}\} \neq a$ in $U_\delta(a)$ enthalten. Dieses Element x_δ liegt aber auch in $U_\varepsilon(a) \subseteq M$. Also ist a ein Häufungspunkt der Menge M.

b) Der Punkt a ist kein Häufungspunkt der Menge $\{a\}$, da kein weiteres von a verschiedenes Element in dieser Menge existiert, welches in einer Umgebung von a enthalten sein könnte. Außerdem ist auch kein anderer Punkt $y \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$ Häufungspunkt von $\{a\}$. Denn mit $d := |y-a|$ gilt dann $a \notin U_{\frac{d}{2}}(y)$.
Nach i) hat $\{a\}$ auch keine inneren Punkte (sonst wäre a auch Häufungspunkt).

c) *Für alle $q \in \mathbb{Q}$ und $\varepsilon > 0$ liegt in der Umgebung $U_\varepsilon(q)$ ein irrationaler Punkt (s Satz im Skript, Seite 33). Die Menge $\mathbb{Q}$ hat demnach keine inneren Punkte. Mit der gleichen Argumentation zeigt man, dass $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ keine inneren Punkte enthält.*

ii) *Zur Offenheit: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die Umgebung $(x-1, x+1)$ in $\mathbb{R}$ enthalten. Also ist $\mathbb{R}$ offen. Auch gibt es für alle Elemente der leeren Menge $\emptyset$ eine ε-Umgebung, die in $\emptyset$ liegt. Da es kein Element in $\emptyset$ gibt, müssen wir auch keine ε-Umgebung finden :-) Auch die leere Menge ist also offen.*
Zur Abgeschlossenheit: Das Komplement offener Mengen ist abgeschlossen (s. Satz im Skript, Seite 89). Das heißt nun, dass $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ auch abgeschlossene Mengen sind.

iii) *Sei $n \in \mathbb{N}$. In der Umgebung $((-1)^n \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2+2n}, (-1)^n \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2+2n})$ von $(-1)^n \frac{1}{n}$ ist bis auf $(-1)^n \frac{1}{n}$ kein weiterer Punkt in M enthalten (Nachrechnen!). Die Menge M kann nicht offen sein.*
Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir betrachten die Umgebung $U_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, d.h. $(-1)^{n_0} \frac{1}{n_0} \in U_\varepsilon(0)$. Der Häufungspunkt 0 ist aber nicht in der Menge M enthalten. Also ist M auch nicht abgeschlossen.

G3 Kompaktheit

i) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ kompakte Teilmengen. Zeige, daß $A \cup B$ ebenfalls kompakt ist.

ii) Seien A_k, $k \in \mathbb{N}$, kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann ist $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ebenfalls kompakt.

iii) Gib ein Beispiel an, in dem die Vereinigung von unendlich vielen kompakten Mengen A_k mit $k \in \mathbb{N}$ nicht kompakt ist.

Zum Nachweis von i) und ii) kann jede der äquivalenten Definitionen von Kompaktheit benutzt werden. Wir geben hier jeweils nur eine Beweismöglichkeit an.

i) *Da A und B kompakt sind, sind diese Mengen abgeschlossen und beschränkt. Dies müssen wir wiederum für $A \cup B$ nachweisen. Die Vereinigung von zwei abgeschlossenen Mengen ist wieder abgeschlossen (s. Satz im Skript, Seite 89). Somit ist $A \cup B$ angeschlossen.*
Da A und B beschränkt sind, gibt es Konstanten a_1, a_2, b_1, b_2 mit $a_1 \leq x \leq a_2$ für $x \in A$ und $b_1 \leq y \leq b_2$ für $y \in B$. Damit gilt

$$\min\{a_1, b_2\} \leq z \leq \max\{a_2, b_2\} \quad \textit{für jedes} \quad z \in A \cup B,$$

da z in A oder B enthalten ist.
Damit ist $A \cup B$ beschränkt und abgeschlossen und somit kompakt.

ii) *Die Menge $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ist als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen (s. Satz im Skript, Seite 89). Sie ist in A_1 enthalten, also ist sie beschränkt. Damit ist sie kompakt.*

iii) *Wir setzen $A_k = \{k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Diese Mengen sind für jedes $k \in \mathbb{N}$ kompakt. Die Menge $\mathbb{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ ist jedoch nicht kompakt, weil sie nicht beschränkt ist.*

Hausübung

H1 Absolute Konvergenz (4 Punkte)

i) Zeige, dass die Reihe

$$C(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

ii) Zeige mit Hilfe des Cauchy-Produkts, dass das folgende Additionstheorem gilt:

$$C(2x) = 2(C(x))^2 - 1.$$

(Hinweis: Verwende eine modifizierte Version des binomischen Lehrsatzes, mit $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$ für $n \geq 1$ (ohne Beweis).)

(Nebenbei: Die vorliegende Reihe $C(x)$ ist gerade die trigonometrische Funktion $\cos x$.)

i) Wir zeigen die absolute Konvergenz mit dem Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}}\right| = x^2 \left|\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right| \leq \frac{x^2}{4n^2} \leq \frac{1}{4} < 1,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq |x|$. Damit ist die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

ii)

$$\begin{aligned}
2(C(x))^2 - 1 &= -1 + 2 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right) \\
&= -1 + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!} x^{2n-2k} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\
&= -1 + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2n-2k)!(2k)!}\right) \\
&= -1 + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\right) \\
&= -1 + 2 \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \cdot 2^{2n-1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = C(2x)
\end{aligned}$$

H2 Konvergenzkriterium von Raabe (4 Punkte)

i) Man beweise das Konvergenzkriterium von Raabe:
Es sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_k > 0$. Existieren nun $d > 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq 1 - \frac{d}{k}$$

für alle $k \geq k_0$ gilt, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.
(Hinweis: Stelle obige Ungleichung um und konstruiere daraus eine konvergente Teleskopsumme)

ii) Sei $s \geq 1$ eine reelle Zahl. Zeige die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s(s-1) \cdot \ldots \cdot (s-k+1)}{k!}.$$

i) Aus der Voraussetzung erhalten wir $ka_{k+1} \leq ka_k - da_k$ *oder*

$$0 < (d-1)a_k \leq (k-1)a_k - ka_{k+1}$$

für alle $k \geq k_0$. *Nach dieser Abschätzung ist die Folge* $(s_k)_{k \geq k_0} := (ka_{k+1})_{k \geq k_0} \subseteq [0, \infty)$ *monoton fallend und daher beschränkt. Daraus ergibt sich*

$$\sum_{k=k_0+1}^{n} (s_{k-1} - s_k) = \text{(Teleskopsumme!) } s_{k_0} - s_n \leq s_{k_0}$$

für $n > k_0$. *Die monoton wachsende Folge der Partialsummen* $\left(\sum_{k=k_0+1}^{n}(s_{k-1} - s_k)\right)_{n > k_0}$ *ist also beschränkt und damit konvergent (s Satz im Skript, Seite 62). Die Konvergenz der Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *folgt nun aus dem Majorantenkriterium:*

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k \leq \frac{1}{d-1} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (s_{k-1} - s_k) \leq s_{k_0} < \infty.$$

(Die endliche Summe $\sum_{k=1}^{k_0} a_k$ *der ersten* k_0 *Folgenglieder ist für die Konvergenz der Reihe unwesentlich.)*

ii) Sei zunächst $s \in \mathbb{N}$. *So bricht die Reihe ab dem* $(s+1)$*-ten Summanden ab:*

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s(s-1) \cdot \ldots \cdot (s-k+1)}{k!} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{s} \frac{s(s-1) \cdot \ldots \cdot (s-k+1)}{k!} + \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{s(s-1) \cdot \ldots \cdot (s-s) \cdot \ldots \cdot (s-k+1)}{k!} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{s} \frac{s(s-1) \cdot \ldots \cdot (s-k+1)}{k!}.
\end{aligned}$$

D.h. es liegt eine endliche Summe vor. Die Reihe konvergiert in diesem Fall.
Sei nun $s \geq 1$ *mit* $s \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$. *Hierfür wenden wir das Kriterium von Raabe an. Um Vorzeichenprobleme vorzubeugen, zeigen wir sogar die absolute Konvergenz der Reihe, d.h.* $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{s(s-1) \cdot \ldots \cdot (s-k+1)}{k!} \right| < \infty$. *Wir erhalten*

$$\begin{aligned}
\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} &= \left| \frac{s(s-1) \cdot \ldots \cdot (s-k+1)(s-k)}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{s(s-1) \cdot \ldots \cdot (s-k+1)} \right| \\
&= \left| \frac{s-k}{k+1} \right| \leq \left| \frac{s-k}{k} \right| = \text{(für } k \text{ genügend groß) } 1 - \frac{s}{k}.
\end{aligned}$$

Wir setzen $d := s > 1$ *und sehen, dass das Kriterium von Raabe für genügend große* k *erfüllt ist und die Reihe somit konvergiert.*

H3 Rand (4 Punkte)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt Randpunkt von A, wenn in jeder Umgebung von a sowohl ein Punkt von A als auch ein Punkt von $\mathbb{R} \backslash A$ liegt. Die Menge aller Randpunkte von A bezeichnen wir mit ∂A. Man zeige:

i) $\partial A = \partial(\mathbb{R} \backslash A)$.

ii) Der Rand ∂A ist abgeschlossen.

Bestimme den Rand der folgenden Mengen:

iii) $[0, 1)$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

i) Diese Gleichheit folgt direkt aus der obigen Definition von Randpunkten. Sei nämlich $a \in \partial A$, dann gibt es in jeder Umgebung sowohl einen Punkt von A als auch einen Punkt von $\mathbb{R} \backslash A$. Damit ist a in $\partial(\mathbb{R} \backslash A)$ enthalten. Wir haben nun die Inklusion $\partial A \subseteq \partial(\mathbb{R} \backslash A)$ nachgewiesen. Für die Inklusion $\partial(\mathbb{R} \backslash A) \subseteq \partial A$ argumentiert man ganz analog.

ii) Wir zeigen die Abgeschlossenheit des Randes ∂A über einen Widerspruchsbeweis. Angenommen ∂A hat einen Häufungspunkt $x \notin \partial A$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass die Umgebung $U_\varepsilon(x)$ entweder ganz in A oder ganz in $\mathbb{R} \backslash A$ liegt. Nehmen wir oBdA an x läge in A. Da x ein Häufungspunkt des Randes ∂A ist gibt es ein $a \in \partial A$ mit $a \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Nun gilt aber wegen der Dreiecksungleichung:

$$|x - y| \leq |x - a| + |a - y| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $y \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$. Aber diese Ungleichung impliziert die Inklusion:

$$U_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \subseteq U_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

Damit ist a kein Randpunkt der Menge A, d.h. $a \notin \partial A$. (Widerspruch!)
Alle Häufungspunkte des Randes ∂A gehören also schon zum Rand, d.h. ∂A ist abgeschlossen.

iii) Es gilt: $\partial[0, 1) = \{0, 1\}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ und $\partial\mathbb{R} = \emptyset$. (Klar warum?)