Analysis I für M, LaG, Ph

6. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

Test I Reihen

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert für $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$.

c) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so konvergiert auch jede beliebige Umordnung der Reihe gegen den gleichen Grenzwert.

d) Sei $(a_n)n \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe absolut.

a) Falsch: Betrachte die Nullfolge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Die entsprechende Reihe, die sog. harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, divergiert allerdings.

b) Richtig: s. Beispiel im Skript, Seite 70.

c) Falsch: Betrachte die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. Diese konvergiert (Leibniz!). Man kann aber per Umornung der Summanden einen anderen Grenzwert der Reihe erhalten (s Skript, Seite 73). (Nebenbei: Man kann sogar jede reelle Zahl als Grenzwert einer geeigneten Umordnung dieser Reihe erhalten.)

d) Falsch: Für die harmonische Reihe gilt: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aber die Reihe divergiert! (Worin liegt also der wesentliche Unterschied zum Quotientenkriterium?)

G1 Konvergenz von Reihen I

Entscheide, ob die folgenden Reihen konvergieren, und berechne gegebenenfalls den Grenzwert.

i) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2^k} + (-\frac{1}{3})^k)$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c}$ mit einer reellen Zahl $\alpha > 2$.

i) Diese Reihe konvergiert, und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2^k}+(-\frac{1}{3})^k) = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2^k}+(-\frac{1}{3})^k)-2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^k-2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}-2 = \frac{3}{4}.$$

Die zweite Gleichheit dieser Gleichungskette bedarf ordentlicher Argumentation! (s Satz im Skript, Seite 71)

ii) Wir betrachten die n-te Partialsumme der Reihe:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k+1}-\sqrt{k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{1}.$$

Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, also ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

iii) Wegen $\alpha > 2$ gilt $\frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{k^2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergiert (s. Vorlesung), können wir diese nun als Majorante betrachten und erhalten damit die Konvergenz:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty.$$

Im allgemeinen ist es sehr schwer (bis hin zu unmöglich) den Grenzwert einer konvergenten Reihe zu bestimmen; ebenso in diesem Fall.

G2 Leibniz-Kriterium

i) Untersuche die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz, falls

$$(a)\ a_k = \frac{2-(-1)^k}{4k}, \quad (b)\ a_k = (-1)^k \left(e - (1+\frac{1}{k})^k \right).$$

ii) Finde eine Nullfolge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, die nur aus positiven reellen Zahlen besteht, so dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

nicht konvergiert.
Ist das ein Widerspruch zum Konvergenzkriterium von Leibniz?

i) *(a) Diese Reihe ist nicht konvergent. Denn nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k}$. *Wäre* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent, so müsste nach Satz auf der Seite 71 des Skripts auch*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{4k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k}$$

konvergieren. Das ist aber die harmonische Reihe, von der wir wissen, dass sie divergiert.
(b) Diese Reihe konvergiert. Denn $(1+\frac{1}{k})^k \xrightarrow{k\to\infty} e$ *und wächst monoton, also ist* $e-(1+\frac{1}{k})^k$ *eine monoton fallende Nullfolge. Somit konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium.*

ii) *Sei* $a_1 = 1$ *und*

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2(k-1)} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

für $n \geq 2$. *Dann ist* (a_n) *offenbar eine Nullfolge, die aus positiven Zahlen besteht. Ausserdem gilt für ungerades* N

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} (-1)^n a_k &= 1 + \sum_{k=2,k \text{ gerade}}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) = 1 + \sum_{k=2,k \text{ gerade}}^{N-1} (\frac{1}{k} - \frac{1}{2k}) \\ &= 1 + \sum_{k=2,k \text{ gerade}}^{N-1} (\frac{1}{2k}) = 1 + \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{4j} = 1 + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{j} \xrightarrow{N\to\infty} \infty \end{aligned}$$

wegen der Divergenz der harmonischen Reihe.
Das ist näturlich KEIN Widerspruch zu Leibniz. Im Leibniz-Kriterium wird eine <u>*monoton fallende*</u> *Nullfolge vorausgesetzt, was hier nicht gegeben ist.*

G3 Quotienten- und Wurzelkriterium

Entscheide, ob die folgenden Reihen konvergieren:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}$

ii) $\sum_{k=5}^{\infty} \sqrt{\frac{e}{2}}^{8k} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{4k^2}$ mit der Eulerschen Zahl e (s 5. Übung, H3)

iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

i) Wir verwenden das Quotientenkriterium und erhalten:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{k+2}{2^{k+1}}\frac{2^k}{k+1} = \frac{1}{2}\frac{k+2}{k+1} \leq \frac{3}{4} < 1$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit konvergiert diese Reihe.

ii) Hier verwenden wir das Wurzelkriterium:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{|\sqrt{\frac{e}{2}}^{8k}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{4k^2}|} = \frac{e^4}{2^4}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k}\right)^4 \leq \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2} < 1$$

für genügend große k, da $(1+\frac{1}{k})^k$ gegen e konvergiert. Damit ist die Konvergenz der Reihe gezeigt.

iii) Und noch einmal das Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{((k+1)!)^2}{(2k+2)!}\frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{4k^2+6k+2} \leq \frac{1}{2} < 1$$

für genügend große k, denn die Folge $\frac{k^2+2k+1}{4k^2+6k+2}$ konvergiert gegen $\frac{1}{4}$. Diese Reihe konvergiert also.

Hausübung

H1 Konvergenz von Reihen II (4 Punkte)

Entscheide, ob die folgenden Reihen konvergieren:

i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k}$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sqrt[k]{k}$

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta + \frac{1}{k}\right)^k$ mit einem reellen Parameter $\beta \geq 0$.

i) Diese Reihe konvergiert und man hat

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

(Nebenbei: Eine solche Summe nennt man eine Teleskopsumme.)

ii) Da $\sqrt[k]{k} \to 1$ gilt, ist also $(-1)^k\sqrt[k]{k}$ keine Nullfolge. Somit kann die Reihe nicht konvergieren.

iii) Wir verwenden das Quotientenkriterium und erhalten:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\frac{k^k}{k!} = \frac{(1+k)k^k}{(1+k)^{k+1}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \leq \frac{1}{e} + \frac{1}{2} < 1,$$

da die Folge $(1+\frac{1}{k})^k$ gegen die Eulersche Zahl e konvergiert (s. 5. Übung, H3).

iv) Es sei $\beta \geq 0$ und $a_k := \left(\beta + \frac{1}{k}\right)^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Da

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \beta + \frac{1}{k} \to \beta,$$

folgt absolute Konvergenz mit dem Wurzelkriterium, falls $\beta < 1$. Denn sei $\varepsilon := \frac{1-\beta}{2} > 0$, so gilt für genügend große $k \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \beta + \varepsilon < 1.$$

Für $\beta > 1$ divergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterum (das Argument ist ganz analog). Für $\beta = 1$ konvergiert die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen e (s. 5. Übung, H3) und ist damit keine Nullfolge, d.h. auch in diesem Fall divergiert die Reihe.

H2 Zur absoluten Konvergenz (4 Punkte)

Es sei $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ eine absolut konvergente Reihe, so dass $a_j \neq -1$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann auch

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{1+a_j}$$

absolut konvergiert.

Da $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert, folgt $|a_j| \leq \frac{1}{2}$ für j groß genug. Also

$$\left|\frac{a_j}{1+a_j}\right| \leq \frac{|a_j|}{1-\frac{1}{2}} = 2|a_j|$$

falls j groß genug ist. Damit konvergiert die Reihe absolut wegen des Majorantenkriteriums.

H3 Reihen (4 Punkte)

i) Es sei $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ eine absolut konvergente Reihe. Zeige, dass dann auch:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{|a_j a_{j+1}|}$$

konvergiert.

ii) Beweise oder widerlege die Umkehrung: Es sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{|a_j a_{j+1}|}$$

konvergiert. Dann konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ absolut.

i) Für beliebige nicht-negative reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (Warum?). Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ absolut. Somit konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j| + |a_{j+1}|}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{j+1}| < \infty.$$

Diese Reihe verwenden wir nun als konvergente Majorante:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{|a_j a_{j+1}|} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j| + |a_{j+1}|}{2} < \infty.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

ii) Die Aussage ist falsch. Betrachte $a_j = 1$ für ungerade j und $a_j = 0$ für gerade j.