Analysis I für M, LaG, Ph

5. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G1 Folgen und Teilfolgen

Man beweise oder widerlege die folgenden Behauptungen:

i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Weiter sei $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a > 0$.

iii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge mit einer gegen y konvergierenden Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Dann konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y.

iv) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die Folge $(\frac{1}{x_{\varphi(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert.

i) Falsch: Betrachte die monoton fallende Folge $(1+\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$.

ii) Falsch: Betrachte die konvergente Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Diese konvergiert gegen 0 und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{n} > 0$.

iii) Richtig: Sei oBdA die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend. Sei $\varepsilon > 0$. Da $(y_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert, gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N_1$ gilt $|x_{\varphi(n)} - y| < \varepsilon$. Außerdem gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass $x_{N_2} = x_{\varphi(N_1)}$.(Weil $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.)
Wir nehmen an es gäbe eine $n_0 \geq N_2$ mit $|x_{n_0} - y| \geq \varepsilon$. Wegen der Monotonie der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $x_{n_0} \geq x_{N_2} = x_{\varphi(N_1)}$. Daher muss also $x_{n_0} > y$ und für alle Folgenglieder x_n mit $n > n_0$ gilt ebenso $x_n > x_{n_0} > y$. Damit würde aber auch die Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ NICHT gegen y konvergieren (Widerspruch!).

iv) Richtig: Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, gibt es ein Folgenglied $x_{\varphi(1)}$ mit $|x_{\varphi(1)}| > 1$. Wir wählen nun rekursiv eine geeignete Teilfolge:

$$|x_{\varphi(m+1)}| > \lfloor x_{\varphi(m)} + 1 \rfloor > m + 1.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Für alle $m \geq \lfloor \frac{1}{\varepsilon} + 1 \rfloor$ gilt $|\frac{1}{x_{\varphi(m)}}| < \frac{1}{m} < \varepsilon$. Damit ist $(\frac{1}{x_{\varphi(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

G2 Cauchy-Folgen

i) Zeige an Hand der Definition, dass die durch

$$a_n := \frac{1 + 4n^2}{2 + 2n^2}$$

definierte Folge eine Cauchy-Folge ist.

ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit einer gegen y konvergierenden Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Man beweise, dass dann auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert.

i) Sei $\varepsilon > 0$. OBdA wählen wir $n \geq m$. dann gilt

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1 + 4n^2}{2 + 2n^2} - \frac{1 + 4m^2}{2 + 2m^2}\right| = \frac{3}{2}\left|\frac{n^2 - m^2}{n^2m^2 + n^2 + m^2 + 1}\right| \leq \frac{3}{2}\left|\frac{n^2}{n^2m^2}\right| = \frac{3}{2m^2} < \varepsilon$$

für $n, m \geq N_\varepsilon := \lfloor \sqrt{\frac{3}{2\varepsilon}} + 1 \rfloor$. Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

ii) Als Cauchy-Folge ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent (Vollständigkeit!). Wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nun gegen z konvergiert, konvergieren auch alle Teilfolgen - insbesondere $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ - gegen z. Also ist $y = z$. (Grenzwerte sind eindeutig!)

G3 Limes Superior und Limes Inferior

Bestimme Limes Superior und Limes Inferior der nachstehenden Folgen:

$$a_n := \begin{cases} \frac{2n}{n+1} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{n}{2n+1} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}, \qquad b_n := \frac{(-1)^n n}{n+1}.$$

Die Folge a_n hat zwei Häufungspunkte, nämlich $\frac{1}{2}$ und 2. Denn $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{4k}{2k+1} = 2$ und $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{4k+3} = \frac{1}{2}$. Das sind die einzigen Häufungspunkte. Denn ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, dann enthält $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unendlich viele gerade oder unendlich viele ungerade Zahlen. Im Fall unendlich vieler gerader Zahlen ist $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 2$, im Fall unendlich vieler ungerader Zahlen ist $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \frac{1}{2}$.
Somit ist 2 der größte und $\frac{1}{2}$ der kleinste Häufungspunkt, i.e., $\limsup_{n\to\infty} a_n = 2$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.
Die Folge b_n hat zwei Häufungspunkte 1 und -1, denn $\lim_{k\to\infty} b_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{2k+1} = 1$ und $\lim_{k\to\infty} b_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{-(2k+1)}{2k+2} = -1$. Mit der gleichen Argumentation wie oben kann man zeigen, daß dies die einzigen Häufungspunkte sind.
Somit ist $\limsup_{n\to\infty} b_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} b_n = -1$.

Hausübung

H1 Arithmetisches und Geometrisches Mittel (4 Punkte)

Für zwei Zahlen x, y nennt man $\frac{x+y}{2}$ das arithmetische Mittel und $\sqrt{x\cdot y}$ das geometrische Mittel dieser Zahlen.
Es seien zwei Zahlen $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_1 < b_1$ gegeben. Damit definieren wir rekursiv die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeige:

i) $0 \le a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.
iii) Beide Folgen sind konvergent.
iv) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

i) Es ist $a_n, b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt

$$a_n - 2\sqrt{a_n}\sqrt{b_n} + b_n = \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow a_n + b_n \ge 2\sqrt{a_n}\sqrt{b_n}$$

$$\Rightarrow b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \ge \sqrt{a_n \cdot b_n} = a_{n+1}.$$

ii) Behauptung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen i)

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \ge \sqrt{a_n a_n} = a_n.$$

Behauptung: $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen i)

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n.$$

iii) *Nehmen wir die Erkenntnisse aus i) und ii) zusammen, so haben wir für jedes $n \in \mathbb{N}$*

$$0 < a_1 \leq ... \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_1.$$

Also sind beide Folgen durch b_1 beschränkt. Da sie außerdem nach ii) monoton sind, konvergieren beide.

iv) *Wir setzen $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b$ und wir erhalten*

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n}{2} = \frac{a+b}{2},$$

woraus $\frac{b}{2} = \frac{a}{2}$ und schließlich $a = b$ folgt.

H2 Häufungspunkte (4 Punkte)

Konstruiere jeweils eine Folge, deren Häufungspunkte genau die Menge:

i) $\{-m, -m+1, -m+2, ..., m-2, m-1, m\}$ für $m \in \mathbb{N}$ bzw.

ii) $\mathbb{Z}$ ist.

i) *Die Menge $\{-m, -m+1, -m+2, \ ... \ , m-2, m-1, m\}$ enthält $2m+1$ Elemente. Wir setzen $x_{k(2m+1)+i} := i - (m+1)$ für $k \in \mathbb{N}\{0\}$ und $i \in \{1, 1, 2, ..., 2m+1\}$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zählt nun alle Elemente der Menge beginnend bei $-m$ nacheinander ab und startet bei jedem Durchgang erneut.*

ii) *Da $\mathbb{Z}$ eine unendliche Menge ist, können wir nicht wie in i) einfach alle Element der Reihe nach durchzählen und anschließend wieder von vorne starten. Wir würden schon beim ersten Durchgang kein Ende finden und jedes Element würde nur genau einmal gezählt werden. Ein kleiner Trick behebt das Problem. Zunächst zählen wir nur die drei Elemente $-1, 0, 1$, anschließend $-2, -1, 0, 1, 2$, weiter $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ usw. Wir zählen also nur endliche Mengen, die sich aber nach jedem Durchgang vergrößern. (soweit anschaulich und unpräzise)*
Wir setzen also $x_{j+i} := i - (k+1)$ für $j := \sum_{l=1}^{k}(2l+1)$, $k \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, 2, ..., 2k+1\}$. (Alles klar?)

H3 Folgen und Grenzwerte III (4 Punkte)

Wir wollen die Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ untersuchen. Für diese soll die Existenz eines Grenzwertes nachgewiesen werden:

i) Die Folge ist nach oben und unten beschränkt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$2 \leq (1 + \frac{1}{n})^n \leq 3.$$

(Man verwende: Für alle $k \geq 4$ gilt $k! \geq 2^k$ (Ohne Beweis). Außerdem sind die Bernoulli Ungleichung, die Binomische Formel und Aufgabe G3)1. des 2. Übungsblattes hilfreich.)

ii) Die Folge ist monoton steigend.

iii) Schließe nun, dass für diese Folge ein Grenzwert existiert.

Dieser Grenzwert ist die sog. Eulersche Zahl $e = 2,718281828459...$ und eine der wichtigsten Konstanten in der Analysis. Da aber die Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ nur sehr langsam konvergiert und für die Analysis eine andere Darstellung von e geeigneter ist, werden wir die Eulersche Zahl in der Vorlesung auf eine andere Weise definieren.

Zusatzaufgabe:
Mit diesen Kenntnissen über die Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ zeige man:

iv) Die Folge $\sqrt[n]{n}$ ist ab dem dritten Glied monoton fallend.

i) *Wenden wir die Bernoulli-Ungleichung auf die Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ an, so erhalten wir*

$$(1+\frac{1}{n})^n \geq 1 + \frac{1}{n}n = 2.$$

Für die obere Schranke benutzen wir die Binomische Formel und den angegebenen Hinweis:

$$\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &= \text{(Binom)}\ 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{n!}{n^k\cdot(n-k)!}\right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(k-1)}{n}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\prod_{l=0}^{k-1}(1-\frac{l}{n})\right) \\
&\leq\ 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq +1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} \\
&= \text{(2.Übg. G3)}\ 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \\
&= 3 + (\frac{1}{6} - \frac{1}{4}) - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{8} < 3.
\end{aligned}$$

ii) *Die Monotonie der Folge erhalten wir direkt mit der Bernoulli Ungleichung:*

$$\begin{aligned}
\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} &= \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1} \\
&\geq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right)\frac{n+2}{n+1} = \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}\frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.
\end{aligned}$$

iii) *Nach der Vorlesung sind beschränkte, monotone Folgen konvergent.*

iv) *Nach i) wissen wir, dass $(1+\frac{1}{n})^n < 3 \leq n$ für alle $n \geq 3$. Stellen wir diese Ungleichung wieder etwas um, so erhalten wir $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} < 1$ und weiter*

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}.$$