Analysis I für M, LaG, Ph

4. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G1 Surjektivität und Injektivität

Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv bzw. surjektiv? Begründe deine Antwort sorgfältig.

i) $f_1 : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ungerade}\} \to \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ gerade}\}, \quad n \mapsto 2n$.

ii) $f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto x^4 + 8$. (Beweise und verwende dabei, dass $x \mapsto x^2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ injektiv ist.)

iii) $f_3 : \{M \subset \mathbb{R} \mid M \neq \emptyset, \ M \text{ beschränkt}\} \to \mathbb{R}, \quad M \mapsto \sup M$.

i) *f_1 ist injektiv, aber nicht surjektiv: $f_1(x) = f_1(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$ und $4 \in \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ gerade}\}$ hat kein Urbild in $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ungerade}\}$.*

ii) *f_2 ist injektiv, aber nicht surjektiv. Denn*

$$f_2(x) = f_2(y) \Rightarrow x^4 + 8 = y^4 + 8 \Rightarrow x^4 = y^4 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y.$$

2 hat kein Urbild, da $f(x) \geq 8$ für alle x.

iii) *f_3 ist surjektiv, aber nicht injektiv. Sei $x \in \mathbb{R}$, dann ist $x = f_3([x-1, x])$. Aber $f_3([0,1]) = 1 = f_3(\{1\})$ mit $[0,1] \neq \{1\}$.*

G2 Überabzählbarkeit

Man zeige die folgenden Behauptungen:

i) Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.
(Hinweis: Nehme an, es gäbe eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Betrachte dann die Menge $A := \{ \ n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n) \ \} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.)

ii) Die Menge aller Folgen mit Einträgen 0 und 1, also $\{ \ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n = 0 \text{ oder } a_n = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \ \}$, ist überabzählbar.

i) *Wir nehmen an, es gäbe eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, d.h. f wäre insbesondere surjektiv. Nun definieren wir die Menge $A := \{ \ n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n) \ \} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Wegen $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $f(n) = A$. Nun gilt es zwei mögliche Fälle zu unterscheiden.*

1) *Angenommen $n \in f(n)$. Nach Definition von A ist dann aber $n \notin A = f(n)$. (Widerspruch!)*

2) *Angenommen $n \notin f(n)$. Nach Definition von A ist dann aber $n \in A = f(n)$. (Widerspruch!)*

Also gibte es keine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Weil aber $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ eine unendliche Menge ist, ist sie überabzählbar.

ii) *Wir setzen $A := \{ \ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n = 0 \text{ oder } a_n = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \ \}$. Im folgenden zeigen wir, dass es eine Bijektion $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to A$ gibt. Damit wäre schon die Überabzählbarkeit von A bewiesen. Denn wäre A abzählbar, gäbe es eine Bijektion $h : \mathbb{N} \to A$. Somit gäbe es aber auch eine Bijektion $(g^{-1} \circ h) : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. (Widerspruch nach Teilaufgabe i) !)*
Nun wollen wir also eine Bijektion $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to A$ konstruieren. Hierzu ordnen wir jeder Teilmenge $N \subseteq \mathbb{N}$ eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ wie folgt zu: Für $n \in N$ setzen wir $a_n := 1$, dagegen für $n \notin \mathbb{N}$ setzen wir $a_n := 0$.
Wir müssen nun zeigen, dass diese Konstruktion tatsächlich eine Bijektion ist:

- *Wohldefiniertheit: Jeder Teilmenge $N \subseteq \mathbb{N}$ wird genau eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\in A}$ zugeordnet.*
- *Surjektivität: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge der Menge A. So ist $M := \{\ n \in \mathbb{N} |\ a_n = 1\ \}$ eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit $g(M) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
- *Injektivität: Angenommen es gäbe zwei ungleiche Teilmengen $N_1 \neq N_2$ von $\mathbb{N}$ mit $g(N_1) =: (a_n^1)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n^2)_{n\in\mathbb{N}} := g(N_2)$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, dass entweder in $N_1 \backslash N_2$ oder in $N_2 \backslash N_1$ enthalten ist. Nehmen wir an, der erste Fall gelte, so ist $a_{n_0}^1 = 1$ und $a_{n_0}^2 = 0$ und damit $g(N_1) \neq g(N_2)$. (Widerspruch!) Analog geht man für den zweiten Fall vor.*

G3 Folgen und Grenzwerte I

i) Die Summe und das Produkt zweier konvergenter Folgen ist wieder konvergent (s. Vorlesung). Gebe jeweils ein Beispiel an, dass die Umkehrung i.a. nicht gilt. Konstruiere also je eine konvergente Folge bestehend aus divergenten Summanden bzw. divergenten Faktoren.

ii) Sei $\varepsilon > 0$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$a_n := \frac{5n+2}{n}.$$

Bestimme den Grenzwert a dieser Folge und gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

iii) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n}.$$

Zeige die Konvergenz dieser Folge und bestimme ihren Grenzwert.

i)
- *Betrachten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := (-1)^{n+1}$. Diese beiden Folgen konvergieren nicht. Aber die Summe ist identisch Null: $a_n + b_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = 0$.*
- *Wir betrachten wieder die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := (-1)^{n+1}$. Das Produkt dieser Folgen ist konstant -1:*

$$a_n \cdot b_n = (-1)^n \cdot (-1)^{n+1} = -1.$$

Als weiteres Beispiel nehmen wir die Folgen $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. Hier konvergiert nun die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, aber $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. Das Produkt dieser Folgen ist identisch 1.

ii) Um die Konvergenz der Folge zu beweisen suchen wir uns einen Kandidaten, welcher als Grenzwert der folge dienen könnte. Man sieht leicht $\frac{5n+2}{n} = 5 + \frac{2}{n}$, und dass daher 5 als geeigneter Kandidat scheint. Sei also $\varepsilon > 0$. Wir erhalten

$$|a_n - a| = |\frac{2}{n}| = \frac{2}{n} < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0 := \lfloor \frac{2}{\varepsilon} + 1 \rfloor \in \mathbb{N}.$$

iii) Zunächst schreiben wir die Folgenglieder um:

$$a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Damit ist

$$\frac{n}{2(n+1)} \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}} \leq a_n \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also gegen $\frac{1}{2}$, da $(\frac{n}{2(n+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert.

Hausübung

H1 (Über-) Abzählbarkeit (4 Punkte)

i) Man zeige, dass die Vereinigung abzählbar unendlich vieler abzählbar unendlicher Mengen abzählbar ist. Sei also $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abzählbar unendlichen Mengen. Dann ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ abzählbar.

ii) Gebe ein Beispiel an, welches zeigt, dass das Resultat aus i) für das kartesische Produkt i.a. nicht gilt.

i) Zunächst können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) annehmen, dass die Mengen M_n paarweise disjunkt sind, d.h.

$$M_n \cap M_m = \varnothing \qquad \text{für alle } n \neq m.$$

(Denn sind die Mengen nicht paarweise disjunkt, so konstruieren wir eine Folge von paarweise disjunkten Mengen $(\tilde{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{M}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ gilt. Wir setzen $\tilde{M}_1 := M_1$ und $\tilde{M}_{n+1} := M_{n+1} \backslash (\bigcup_{1\leq i\leq n} M_i)$.)
Da jede der Mengen M_n abzählbar ist, können wir die Elemente der Menge M_n wie die natürlichen Zahlen anordnen (entsprechend der jeweiligen Bijektion $\mathbb{N} \to M_n$). Wir erhalten also für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Darstellung $M_n = \{\ m_{i,n} |\ i \in \mathbb{N}\ \}$. Nun bilden wir ganz analog zu dem Beweis, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist (s. Vorlesung), eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ mit dem sog Cauchy'schen Diagonalverfahren. Wir zählen die Elemente von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ wie folgt durch:

$$f(1) := m_{1,1} \in M_1, \quad f(2) := m_{2,1} \in M_1, \quad f(3) := m_{1,2} \in M_2, \quad f(4) := m_{3,1} \in M_1,$$

$$f(5) := m_{2,2} \in M_2, \quad f(6) := m_{1,3} \in M_3, \quad f(7) := m_{4,1} \in M_1, \quad f(8) := m_{3,2} \in M_2,$$

$$f(9) := m_{2,3} \in M_3, \quad f(10) := m_{1,4} \in M_2, \quad f(11) := m_{5,1} \in M_1, \ \dots \ .$$

ii) Wir setzen für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $M_n := \{0,1\}$. Bilden wir nun mit diesen Mengen das kartesische Produkt, so haben wir:

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} M_n = \prod_{n\in\mathbb{N}} \{0,1\} := \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots \ .$$

Einem Element aus diesem Produkt wird jeder natürlichen Zahl entweder 0 oder 1 zugeordnet. Das kartesische Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$ entspricht also genau der Menge

$$\{\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} |\ a_n = 0 \text{ oder } a_n = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\ \}$$

aus der Gruppenübung G2. Dort wurde nachgewiesen, dass $\{\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} |\ a_n = 0$ oder $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}\ \}$ und damit auch $\prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$ überabzählbar ist.

H2 Folgen und Grenzwerte II (4 Punkte)

i) Beweise oder widerlege die folgende Behauptung: Jede beschränkte Folge konvergiert.

ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch folgende Vorschrift definiert:

$$a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige die Konvergenz dieser Folge und bestimme ihren Grenzwert.

iii) Zeige, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$b_n := \sqrt[n]{n}$$
gegen 1 konvergiert.
(Hinweis: Zeige $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$.)

i) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch 1 nach oben und durch -1 nach unten beschränkt. Allerdings konvergiert diese Folge nicht. Damit ist die Behauptung falsch.

ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$0 \leq a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
Da die Folge $\left((\frac{1}{2})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null.

iii) Für alle $n \geq 2$ bekommen wir mit der Binomischen Formel:
$$(1 + \frac{2}{\sqrt{n}})^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^k \geq \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 = 2(n-1) \geq n.$$
Daraus folgt nun $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$. Da $\frac{2}{\sqrt{n}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1.

H3 Konvergenz des Mittels einer Folge (4 Punkte)

i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Zeige, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$b_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$
ebenfalls gegen a konvergiert.
(Hinweis: Benutze folgende Aufspaltung der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{n} + \frac{a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n}{n}.$$
Wähle hierbei k geschickt anhand der Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)

ii) Zeige mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass aus der Konvergenz von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im allgemeinen nicht die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt.

i) Wir wollen zeigen, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass
$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$
für $n \geq k$. Damit gilt nun
$$\begin{aligned}|b_n - a| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| &\leq \frac{|a_1 - a|}{n} + \frac{|a_2 - a|}{n} + \cdots + \frac{|a_n - a|}{n} \\ &< \frac{|a_1 - a|}{n} + \frac{|a_2 - a|}{n} + \cdots + \frac{|a_{k-1} - a|}{n} + \frac{n-(k-1)}{2n}\varepsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k-1}|a_i - a| + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$
denn $\frac{n-(k-1)}{n} \leq 1$. Sei nun $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \max\{k, \frac{2}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{k-1}|a_i - a|\}$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann
$$|b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Damit ist die Konvergenz der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a gezeigt.

ii) *Auch hier können wir als Gegenbeispiel die Folge* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heranziehen. Diese Folge konvergiert nicht. Allerdings gilt für das Mittel:*

$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(-1)^n \in \{-\frac{1}{n}, 0\}.$$

Für n *gerade ist* $b_n = 0$ *und für* n *ungerade ist* $b_n = -\frac{1}{n}$. *Damit konvergiert die Folge* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen Null.*