Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Farwig
Birgit Debrabant, Raphael Schulz, Felix Riechwald

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
24. Oktober 2008

2. Übungsblatt zur „Analysis I (deutsch)“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Ungleichungen lösen)

Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, für die die folgenden Ungleichungen gelten.

(a) $x + 1 \leq 2|x| \leq x + 2$

(b) $|x - 2| \leq |x + 1|$

(c) $|x| \geq x^2$

Rechtfertigen Sie Ihre Überlegungen mit den Anordungsaxiomen und ihren Folgerungen aus dem Skript.

Lösung:

(a) <u>1. Fall:</u> Wir suchen zunächst Lösungen x mit $x \geq 0$. Für solche Lösungen ist $|x| = x$ und also

$$x + 1 \leq 2x \leq x + 2$$

was wegen Anordnugnsaxiom A12 genau von den x mit $1 \leq x \leq 2$ erfüllt wird.

<u>2. Fall:</u> Nun bestimmen wir noch die Lösungen x mit $x < 0$. Solche Lösungen erfüllen $|x| = -x$ und also auch

$$x + 1 \leq -2x \leq x + 2.$$

Dies sind mit Axiom A12 und Folgerung 2 aus den Anordnungsaxiomen genau die x mit $-\frac{2}{3} \leq x \leq -\frac{1}{3}$.

Insgesamt erhalten wir also als Lösungsmenge: $[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}] \cup [1, 2]$.

(b) <u>1. Fall: $x < -1$:</u> In diesem Fall ist $|x - 2| = 2 - x$ und $|x + 1| = -1 - x$. Wir lösen also $2 - x \leq -1 - x$ und das ist wegen Axiom A12 äquivalent zu $2 \leq -1$, was (für alle x) falsch ist. Damit gibt es keine Lösungen x mit $x < -1$.

<u>2. Fall: $-1 \leq x < 2$:</u> Dann ist $|x - 2| = 2 - x$ aber $|x + 1| = x + 1$. Wir lösen $2 - x \leq x + 1$ was wegen Axiom A12 und Folgerung 2 aus den Anordnungsaxiomen äquivalent zu $x \geq \frac{1}{2}$ ist. Wir erhalten als Lösungsmenge $\left[\frac{1}{2}, 2\right)$.

<u>3. Fall: $2 \leq x$:</u> Im letzten Fall lösen wir $x - 2 \leq x + 1$, was äquivalent zu der (für alle x) wahren Aussage $-2 \leq 1$ ist. Damit gehört auch $[2, \infty)$ zur Lösungsmenge.

Die Lösungsmenge ist insgesamt also $\left[\frac{1}{2}, 2\right) \cup [2, \infty) = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

(c) 1. Fall: $x < 0$: Es gilt dann $|x| = -x$ und wir lösen also $-x \geq x^2$. Multiplikation der Ungleichung mit x^{-1} ergibt wegen dem Anordnungsaxiom A13 $-1 \leq x$, da x^{-1} negativ ist (analog wie Folgerung 4 aus den Anordnungsaxiomen aus dem Skript). Also lösen alle $x < 0$ mit $x \geq -1$ die Ungleichung.
2. Fall: $0 \leq x$: Wir lösen dann $x \geq x^2$ und wegen der Positivität von x^{-1} (Folgerung 4 aus den Anordnungsaxiomen) folgt mit A13, dass $1 \geq x$. Damit lösen diejenigen $x \geq 0$ mit $1 \geq x$ die Ungleichung.
Insgesamt besteht die Lösungsmenge also aus $[-1, 0) \cup [0, 1] = [-1, 1]$.

Aufgabe G2 (Beträge und Ungleichungen)
Zeige: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$.
Hinweis: Benutze keine Fallunterscheidung, sondern setze $c := a + b$ und $d := a - b$ und formuliere die Ungleichung in c und d.

Lösung: Es gilt mit $c := a + b$ und $d := a - b$, dass $a = \frac{1}{2}(c + d)$ und $b := \frac{1}{2}(c - d)$. Es ergibt sich mit der positiven Homogenität des Betrages und Dreiecksungleichung (7b und 7c im Skript):

$$\begin{aligned}|a| + |b| &= |\frac{1}{2}(c + d)| + |\frac{1}{2}(c - d)| = \frac{1}{2}|c + d| + \frac{1}{2}|c - d| = \frac{1}{2}(|c + d| + |c + (-d)|)\\ &\leq \frac{1}{2}(|c| + |d| + |c| + |-d|) = \frac{1}{2}(2|c| + |d| + |-1||d|)\\ &= \frac{1}{2}(2|c| + 2|d|) = |c| + |d| = |a + b| + |a - b|.\end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen.

Aufgabe G3 (Vollständige Induktion)
Beweisen Sie die untenstehenden Aussagen mittels vollständiger Induktion. Hierbei sei $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$.

1. $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
2. Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten, n verschiedene Dinge anzuordnen.
3. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Lösung:

(a) Induktionsanfang: Die Formel stimmt für $n = 0$, denn es gilt $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$.
Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Aussage ist wahr für alle $n \leq n_0$ für ein festes $n_0 \in \mathbb{N}$. Insbesondere nehmen wir an, dass $\sum_{k=0}^{n_0} q^k = \frac{1-q^{n_0+1}}{1-q}$ gilt. Wir müssen zeigen, dass die Aussage dann auch für $n = n_0 + 1$ gilt; es ist also die Gültigkeit von $\sum_{k=0}^{n_0+1} q^k = \frac{1-q^{n_0+2}}{1-q}$ zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n_0+1} q^k &= \left(\sum_{k=0}^{n_0} q^k\right) + q^{n_0+1} = \frac{1 - q^{n_0+1}}{1 - q} + q^{n_0+1}\\ &= \frac{1 - q^{n_0+1}}{1 - q} + \frac{(1 - q)q^{n_0+1}}{1 - q}\\ &= \frac{1 - q^{n_0+1} + q^{n_0+1} + q^{n_0+2}}{1 - q}\\ &= \frac{1 - q^{n_0+2}}{1 - q},\end{aligned}$$

wobei die Induktionsannahme bei der zweiten Gleichung eingegangen ist. Damit ist der Beweis vollständig.

(b) <u>Induktionsanfang:</u> Für $n = 1$ hat man nur ein einziges Ding und es gibt auch nur eine $(1! = 1)$ Möglichkeit, dieses anzuordnen.

<u>Induktionsschritt:</u> Wir nehmen an, die Aussage ist wahr für alle $n \leq n_0$ für ein festes $n_0 \in \mathbb{N}$. Insbesondere nehmen wir also an, dass es genau $n_0!$ Möglichkeiten gibt, n_0 Dinge anzuordnen. Wir müssen nun zeigen, dass es $(n_0 + 1)!$ Möglichkeiten gibt, $n_0 + 1$ Dinge anzuordnen.

Dafür seien $n_0 + 1$ Dinge gegeben. Dann gibt es $n_0 + 1$ Möglichkeiten ein erstes Dinge für die Reihenfolge auszuwählen. Für jede Wahl von einem ersten Element bleiben wegen der Induktionsannahme noch $n_0!$ Möglichkeiten, die restlichen n_0 Dinge hinter dem ersten anzuordnen. Es ergibt sich also, dass wir $(n_0 + 1) \cdot n_0! = (n_0 + 1)!$ Möglichkeiten hatten, die $n_0 + 1$ Dinge anzuordnen.

(c) <u>Induktionsanfang:</u> Für $n = 1$ stimmt die Aussage, denn wir haben dann $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{n}{n+1}$.

<u>Induktionsschritt:</u> Für ein festes aber beliebiges $n_0 \in \mathbb{N}$ nehmen wir an, dass die Aussage für alle $n \leq n_0$ wahr ist. Insbesondere gilt dann $\sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n_0}{n_0+1}$. Nun müssen wir zeigen, dass $\sum_{k=1}^{n_0+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n_0+1}{n_0+2}$. Die folgende Rechnung beweist dies, wobei die Induktionsannahme in der zweiten Gleichung eingeht:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n_0+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n_0+1)(n_0+2)} = \frac{n_0}{n_0+1} + \frac{1}{(n_0+1)(n_0+2)} \\
&= \frac{n_0(n_0+2)+1}{(n_0+1)(n_0+2)} = \frac{n_0^2 + 2n_0 + 1}{(n_0+1)(n_0+2)} = \frac{(n_0+1)^2}{(n_0+1)(n_0+2)} \\
&= \frac{n_0+1}{n_0+2}.
\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Ungleichungen lösen) (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Ungleichung $x \leq |x - 1|$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Ungleichung $|x + 5| + |x + 3| \leq 10$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Lösung:

(a) <u>1.Fall: $x < 1$:</u> Dann ist $x \leq -x + 1$ zu lösen. Es ergibt sich $x \leq \frac{1}{2}$.

<u>2.Fall: $x \geq 1$:</u> Dann müssen wir $x \leq x - 1$ lösen. Es gibt aber keine Lösungen, da die Ungleichung äquivalent zu $0 \leq -1$ ist.

Insgesamt ergibt sich als Lösungsmenge $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \emptyset = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

(b) <u>1. Fall: $x < -5$:</u> Auf diesem Bereich ist die Ungleichung äquivalent zu $-x - 5 - x - 3 \leq 10$, was wiederum äquivalent ist zu $x \geq -9$. Damit erhalten wir als erstes $[-9, -5)$ als Teillösungsmenge.

<u>2. Fall: $-5 \leq x < -3$:</u> Hier lösen wir $x + 5 - x - 3 \leq 10$, was äquivalent ist zu $2 \leq 10$. Dies ist immer (für alle x) wahr und gehört der ganze Bereich $[-5, -3)$ zur Lösungsmenge.

<u>3. Fall: $-3 \leq x$:</u> Hier müssen wir $x+5+x+3 \leq 10$ lösen, was genau von den $x \in (-\infty, 1]$ gelöst wird. Wir hatten uns aber auf $x \geq -3$ eingeschränkt. Als letzten Beitrag zur Lösungsmenge ergibt sich $[-3, 1]$.

Die Lösungsmenge ist also $[-9, -5) \cup [-5, -3) \cup [-3, 1] = [-6, 1]$.

(c) Wir rechnen

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \frac{(x^2+y^2+2xy)-4xy}{4} = \frac{x^2+y^2-2xy}{4} = \frac{(x-y)^2}{4} \geq 0,$$

was die Ungleichung beweist.

Aufgabe H2 (Maximum, Minimum, Beträge) (4 Punkte)

Für zwei reelle Zahlen a und b definieren wir:

$$\max\{a,b\} := \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a < b \end{cases}, \qquad \text{und} \qquad \min\{a,b\} := \begin{cases} b, & a \geq b \\ a, & a < b \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie: $\min\{a,b\} = -\max\{-a,-b\}$.

(b) Zeigen Sie: $\max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.

(c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass $\min\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

Lösung:

(a) <u>1. Fall: $a \geq b$:</u> In diesem Fall ist $-a \leq -b$ und also ist $-\max\{-a,-b\} = -(-b) = b = \min\{a,b\}$.
<u>2. Fall: $a < b$:</u> Dann ist $-b < -a$ und also $-\max\{-a,-b\} = -(-a) = a = \min\{a,b\}$.
Also ist die Aussage für alle a und b richtig.

(b) <u>1. Fall: $a \geq b$:</u> Dann ist $a - b \geq 0$ und also

$$\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b+a-b) = \frac{1}{2}2a = a = \max\{a,b\}.$$

<u>2. Fall: $a < b$:</u> Dann ist $a - b < 0$ und es gilt

$$\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b-a+b) = \frac{1}{2}2b = b = \max\{a,b\}.$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \min\{a,b\} &= -\max\{-a,-b\} = -\frac{1}{2}\left((-a)+(-b)+|(-a)-(-b)|\right) \\ &= -\frac{1}{2}(-1)(a+b-|(-1)(a-b)|) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|), \end{aligned}$$

was die Behauptung beweist.

Aufgabe H3 (Vollständige Induktion) (4 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die untenstehenden Aussagen. Hier sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(a) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer endlichen Menge M mit n Elementen hat genau 2^n Elemente.
Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, dass es für festes $a \in M$ genauso viele Teilmengen von M gibt, die das Element a enthalten, wie welche, die a nicht enthalten.

(c) $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$

Lösung:

(a) Induktionsanfang: Für $k = 0$ ist die Aussage wahr, denn es gilt $\sum_{k=0}^{n} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$.
Induktionsschritt: Wir nehmen nun an, die Aussage sei wahr für alle $n \leq n_0$ bei einem festen $n_0 \in \mathbb{N}$. Insbesondere nehmen wir an, dass $\sum_{k=0}^{n_0} k = \frac{n_0(n_0+1)}{2}$ gilt. Wir müssen zeigen, dass dann auch $\sum_{k=0}^{n_0+1} k = \frac{(n_0+1)(n_0+1+1)}{2}$ gilt. Dies ist wahr denn es gilt

$$\sum_{k=0}^{n_0+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n_0} k\right) + (n_0+1) = \frac{n_0(n_0+1)}{2} + n_0 + 1$$
$$= \frac{1}{2}(n_0(n_0+1) + 2(n_0+1)) = \frac{1}{2}(n_0+2)(n_0+1)$$

wobei in der zweiten Gleichung die Induktionsannahme eingeht.

(b) Induktionsanfang: Für Mengen M mit nur $n = 0$ Elementen (also $M = \emptyset$) hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ genau $1 = 2^0$ Elemente, nämlich $\emptyset$.
Induktionsschritt: Nehmen wir an, für Mengen M mit n Elementen, $n \leq n_0$, hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ genau 2^n Elemente. Wir müssen zeigen, dass dann auch für Mengen mit $n_0 + 1$ Elementen die Potenzmenge genau 2^{n_0+1} Elemente hat.
Sei also M eine Menge mit n_0+1 Elementen. Insbesondere ist M dann nicht leer. Sei also a ein Element von M. Betrachten wir nun die Menge $M' := M \setminus \{a\}$. Diese Menge hat n_0 Elemente und also hat ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(M')$ genau 2^{n_0} Elemente nach Induktionsannahme. Wir teilen nun die Potenzmenge von M wie folgt in zwei disjunkte Teile: $\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, wobei

$$\mathcal{P}_1 := \{A \subseteq M : a \in A\}, \qquad \mathcal{P}_2 := \{A \subseteq M : a \notin A\}.$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}(M')$ und also hat $\mathcal{P}_2$ genau 2^{n_0} Elemente. Andererseits entspricht jeder Teilmenge $A \in \mathcal{P}_2$ genau eine Teilmenge $B \in \mathcal{P}_1$, nämlich $B := A \cup \{a\}$. Es folgt also, dass $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ gleich viele Elemente haben, also 2^{n_0}. Die Anzahl der Elemente der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist also $2^{n_0} + 2^{n_0} = 2 \cdot 2^{n_0} = 2^{n_0+1}$.

(c) Induktionsanfang: Für $n = 1$ stimmt die Formel, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} kq^{k-1} = 1 = \frac{(1-q)^2}{(1-q)^2} = \frac{1-(1+1)q^1 + 1q^{1+1}}{(1-q)^2}.$$

Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Formel ist richtig für alle $n \leq n_0$ und wir wollen zeigen, dass sie auch für $n = n_0 + 1$ gilt. Wir rechnen:

$$\sum_{k=1}^{n_0+1} kq^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{n_0} kq^{k-1}\right) + (n_0+1)q^{n_0+1-1}$$
$$= \frac{1-(n_0+1)q^{n_0} + n_0 q^{n_0+1}}{(1-q)^2} + \frac{(1-q)^2(n_0+1)q^{n_0}}{(1-q)^2}$$
$$= \frac{1-(n_0+1)q^{n_0} + n_0 q^{n_0+1} + (1-2q+q^2)(n_0+1)q^{n_0}}{(1-q)^2}$$
$$= \frac{1+(n_0-2(n_0+1))q^{n_0+1} + (n_0+1)q^{n_0+2}}{(1-q)^2}$$
$$= \frac{1-(n_0+2)q^{n_0+1} + (n_0+1)q^{n_0+2}}{(1-q)^2}$$