Analysis I für M, LaG, Ph

1. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G1 Relationen im Alltag

Sei M die Menge aller Menschen. Welche der Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transivität haben die folgenden Relationen auf M?

i) die Relation "ist Vorfahre von"

ii) die Relation "ist verheiratet mit"

iii) die Relation "hat den gleichen Vater und die gleiche Mutter wie"

Was müsste gelten, damit aus $ii)$ eine Äquivalenzrelation wird?

Es ergibt sich:
$i)$ *nicht reflexiv, nicht symmetrisch, transitiv;*
$ii)$ *nicht reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv;*
$iii)$ *reflexiv, symmetrisch, transitiv.*
Reflexivität und Transivität scheitern daran, dass man nicht sich selbst verheiratet sein kann. Man müste also hinzunehmen, dass jeder immer mit sich selbst verheiratet ist.

G2 Partition und Relation

Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dabei nennt man

$$[a] := \{b \in M |\ b \sim a\}$$

die *Äquivalenzklasse* von $a \in M$.
Zeige, dass $\{[a] \mid a \in M\}$ eine Partition von M ist.

Es ist zu zeigen, dass $\bigcup_{a \in M}[a] = M$ *und für alle* $a, b \in M$ *entweder* $[a] \cap [b] = \varnothing$ *oder* $[a] = [b]$ *gilt. Weil* $[x] \subseteq M$ *für alle* $x \in M$ *gilt, ist* $\bigcup_{a \in M}[a] \subseteq M$ *klar. Sei nun* $x \in M$, *so gilt* $x \in [x] \subseteq \bigcup_{a \in M}[a]$. *Zusammen gilt also* $\bigcup_{a \in M}[a] = M$.
Nun wollen wir die Disjunktheit verschiedener Äquivalenzklassen zeigen. Hierfür seien $a, b \in M$ *und wir nehmen* $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ *an. Wir müssen also* $[a] = [b]$ *zeigen. Es existiert ein* $c \in [a] \cap [b]$. *Weiter sei* x *ein beliebiges Element aus* $[a]$. *Mit* $x \sim a$ *und* $c \sim a$ *erhalten wir wegen der Symmetrie und der Transitivität der Äquivalenzrelation* $x \sim c$ *und daher gilt mit* $c \sim b$:

$$x \sim b,$$

dh. $x \in [b]$. *Damit ist* $[a] \subseteq [b]$ *gezeigt. Analog zeigt man* $[b] \subseteq [a]$.

G3 Folge von Mengen

Sei $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen. Wir definieren

$$\liminf\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcap_{i \in \mathbb{N}, i > j} M_i, \quad \text{(Limes inferior)}$$

$$\limsup\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}, i > j} M_i. \quad \text{(Limes superior)}$$

i) Man mache sich Folgendes klar:
Die Menge $\liminf\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ enthält alle Elemente, die für ein $j \in \mathbb{N}$ in allen Mengen M_i, $i > j$, enthalten sind.
Die Menge $\limsup\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ enthält alle Elemente, die in unendlich vielen Mengen M_i, $i \in \mathbb{N}$ enthalten sind.

ii) Beweise, dass
$$\liminf\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \limsup\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$$
gilt.

i) Schreibt man die Mengenoperationen in Worten aus, so liegt das Element x genau dann in der Menge $\liminf\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, wenn es ein $j \in \mathbb{N}$ gibt (dass formuliert die Vereinigung!), so dass $x \in M_i$ für alle $i > j$ (Schnitt!).
Analog enthält die Menge $\limsup\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ genau dann das Element x, wenn für alle $j \in \mathbb{N}$ (Schnitt!) ein $i > j$ existiert (Vereinigung!), so dass $x \in M_i$.

ii) Aus $x \in \liminf\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ folgt, dass $x \in \bigcap_{i>k} M_i$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Daraus ergibt sich, dass $x \in M_i$ für alle $i > k$. Deswegen gilt $x \in \bigcup_{i>j} M_i$ für alle $j \in mathbbN$. Schliesslich erhalten wir, dass
$$x \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{i>j} M_i.$$

Hausübung

H1 Eine Äquivalenzrelation (4 Punkte)

Sei $\sim$ eine Relation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die folgendermassen definiert ist:
$$(m, n) \sim (m', n') :\Leftrightarrow m + n' = m' + n.$$

i) Zeige, dass $(2, 3) \sim (3, 4)$ gilt.
ii) Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.
iii) Skizziere die Partition von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bzgl. dieser Äquivalenzrelation.

i) $(2, 3) \sim (3, 4) \Leftrightarrow 2 + 4 = 3 + 3$.

ii) Die Relation $\sim$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Äquivalenzrelation.
reflexiv: $(m, n) \sim (m, n) :\Leftrightarrow m + n = m + n$, was für alle $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ erfüllt ist.
symmertrisch: $(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow (m', n') \sim (m, n)$ erfüllt, da $m + n' = m' + n = m+n'$ für alle $(m, n), (m', n') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ wegen des Körperaxiom (Seite 14 im Skript).
transitiv: $[(m, n) \sim (m', n')$ und $(m', n') \sim (m'', n'')] \Leftrightarrow (m, n) \sim (m'', n'')$ erfüllt, da
$$m + n' + n'' = m' + n + n'' = [Körperaxiom] = m' + n'' + n = m'' + n' + n,$$
also
$$m + n' + n'' = m'' + n' + n \Rightarrow [Körperaxiom] \Rightarrow m + n'' + n' = m'' + n + n',$$
$$m + n'' + n' + (-n') = m'' + n + n' + (-n') \Rightarrow m + n'' = m'' + n$$
für alle $(m, n), (m'', n'') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

H2 Kartesisches Produkt (4 Punkte)

i) Zeige, dass das Kartesische Produkt nicht kommutativ ist, d.h. $X \times Y = Y \times X$ gilt nicht.
ii) Beweise, dass $X \times Y = X \times Z$ und $X \neq \emptyset$ die Gleichheit $Y = Z$ implizieren.

i) $X = \{0\}$ und $Y = \{1\}$ $((0, 1) \neq (1, 0))$.

ii) Seien $y \in Y$, $X \neq \emptyset$ und $a \in X$. Dann $(a, y) \in X \times Z$, da $X \times Y = X \times Z$ ist. Daraus folgt, dass $y \in Z$ ist. Analog zeigt man, dass $Z \subset Y$ ist.

H3 Grenzwert von Mengenfolgen (4 Punkte)

Falls $\liminf\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \limsup\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, dann definieren wir

$$\lim\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} := \liminf\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \limsup\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

Bestimmen Sie, falls möglich, $\lim\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ für die folgenden Mengen

i) $M_i = [0, i] \subset \mathbb{R}$,

ii) $M_i = [0, 1/i]$,

iii) $M_i = [0, 1]$ für i gerade, $[-1, 0]$ für i ungerade.

i) $\lim\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} = [0, \infty)$,

ii) $\lim\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \{0\}$

iii) $\limsup\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} = [-1, 1]$, $\liminf\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \{0\}$.