Übungen

Eine Auswahl von Übungsaufgaben

1) Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche der Kugel

$$K = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \}$$

mit $R > 0$.

Nach dem Gaußschen Integralsatz ist

$$\iint_{\partial K} H \cdot d\omega \underset{\uparrow}{=} \iiint_K \operatorname{div}(H)\, dx$$

Gaußscher Integralsatz

$$= \iiint_K 3(x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$\underset{\uparrow}{=} 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 (r^2 \sin\varphi)\, dr\, d\varphi\, d\vartheta$$

Übergang zu Kugelkoordinaten

$$= 6\pi \underbrace{\int_0^R r^4\, dr}_{\frac{1}{5}R^5} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi}_{2}$$

$$= \frac{12}{5} \pi R^5$$

□

2) Gegeben sei die Differentialgl

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 1$$

mit $x > 0$.

a) Lösen Sie die zugehörige homogene DGL mit dem d'Alembertschen Reduktionsverfahren (Hinweis: Eine Lsg der homog Gl ist $y = x$)

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lsg der inhomog Gl durch Variation der Konstanten (Hinweis: $\int \ln x \, dx = x \ln x - x$)

a) Die zugehörige homogene DGL ist

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$$

$y_1 = x$ löst diese DGL. Einsetzen des Ansatzes

$$y_2 = y_1 v$$

liefert

$$(y_1'' v + 2 y_1' v' + y_1 v'')$$

$$- \frac{1}{x} (y_1' v + y_1 v') + \frac{1}{x^2} y_1 v = 0$$

bzw

$$\underbrace{\left(y_1'' - \frac{1}{x} y_1' + \frac{1}{x^2} y_1\right) v}_{=0} + \left(2 y_1' - \frac{1}{x} y_1\right) v' + y_1 v'' = 0$$

Also

$$x v'' + v' = 0$$

Setze $w = v'$. Dann

$$x \frac{dw}{dx} + w = 0$$

Separation der Variablen liefert

$$\int \frac{dw}{w} = - \int \frac{dx}{x}$$

und

$$\ln |w| = - \ln x + \text{const}$$

so daß

$$w = \frac{c}{x}$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Dann

$$v = c \ln x + d$$

und

$$y_2 = c x \ln x + d x$$

Die allgemeine Lsg der homog DGL lautet also

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x$$

b) Sei $y_1 = x$, $y_2 = x \ln x$. Der Variationsansatz für eine part Lsg der inhomogenen DGL ist

$$y(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$$

mit

$$c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0$$

Dann ist

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} x & x\ln x \\ 1 & 1+\ln x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Sei $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc \neq 0$. Dann

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$)

und

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 1+\ln x & -x\ln x \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x} \begin{pmatrix} -x\ln x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ln x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also

$$c_1' = -\ln x$$

$$c_2' = 1$$

Es folgt

$$c_1 = -(x \ln x - x)$$

$$c_2 = x$$

(Da wir nur eine beliebige spezielle Lsg suchen, benötigen wir die Integrationskonst nicht.)

Also

$$y = x(x - x\ln x) + x \ln x \,(x)$$

$$= x^2$$

Die allgem Lsg der inhomog DGL ist also

$$y = a_1 x + a_2 x \ln x + x^2$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

3) Gegeben sei die DGL

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

a) Bestimmen Sie die allgem Lsg der homog DGL

b) Bestimmen Sie die allgem Lsg der inhomog DGL indem Sie einen Ansatz vom Typ der Störfkt machen.

a) Das charakteristische Polynom der homog DGL ist

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + \lambda = (\lambda - 1)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda = 1$.

Die allgem Lsg der homog DGL ist also

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$
$$= e^x (c_1 + c_2 x)$$

b) Da $\lambda = 1$ eine doppelte Nullstelle des cha Polynoms ist, lautet der Ansatz vom Typ der Störfkt

$$y = x^2 A_0 e^x = A_0 x^2 e^x$$

Dann ist

$$y' = A_0 (2x e^x + x^2 e^x)$$

$$= A_0 (2x + x^2) e^x$$

$$y'' = A_0 (2 + 2x) e^x$$

$$+ A_0 (2x + x^2) e^x$$

$$= A_0 (2 + 4x + x^2) e^x$$

und

$$y'' - 2y' + y$$

$$= A_0 (2 + 4x + x^2) e^x$$

$$- 2A_0 (2x + x^2) e^x + A_0 x^2 e^x$$

$$= A_0 2 e^x$$

Also

$$2A_0 = 1$$

und

$$A_0 = 1/2$$

Eine spezielle Lsg der inhomog Gl ist also

$$y = \frac{1}{2} x^2 e^x$$

Die allgem Lsg der inhomog Gl lautet also

$$y = e^x \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2} x^2 \right)$$

4) Formulieren Sie den Satz von Liouville

Der Satz lautet:

Sei f eine ganze beschränkte Fkt. Dann ist f konstant

5) Berechnen Sie das Int

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$$

mit dem Residuensatz

Die Fkt

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

hat Pole der Ordnung 2 in $z = \pm i$.

Es gilt

$$\operatorname{Res}(f, i) = \tilde{f}'(i)$$

mit

$$\tilde{f}(z) = (z - i)^2 f(z)$$

$$= \frac{1}{(z+i)^2}$$

Aus

$$\tilde{f}'(z) = -\frac{2}{(z+i)^3}$$

folgt

$$\tilde{f}'(i) = -\frac{2}{-8i} = \frac{1}{4i}$$

und

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{1}{4i}$$

Nach dem Residuensatz ist nun

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

$$= 2\pi i \, \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$