8. Folgen und Reihen komplex differenzierbarer Funktion und der Residuensatz

Wir zeigen hier, daß sich komplex diffb Fkt lokal in Potenzreihen entwickeln lassen. Allgemeiner werden wir sehen, komplex diffb Funktionen auf Ringgebieten Laurententwicklungen haben und wir werden den Residuen-satz formulieren.

8.1 Gleichmäßige Approximation

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$

Eine Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ von Fkt f_n: $D \to \mathbb{C}$ heißt gleichmäßig konv gegen $f: D \to \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N gibt, so daß

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

für $n \geq N$ und alle $z \in D$.

Die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ konv lokal glm gegen f, wenn jeder Pkt $z_0 \in D$ eine Umgebung U

besitzt, so daß die Folge

$(f_n|_{U \cap D})_{n \geq 0}$ glm konv.

Sei (f_n) eine Folge von stetigen Fkt, welche lokal glm gegen f konv. Dann ist auch die Grenzfkt f stetig. Für jede Kurve $\alpha : [a,b] \to D$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int_\alpha f_n(z)\,dz = \int_\alpha f(z)\,dz$$

Für die Ableitungen gilt

<u>Satz</u> (Weierstrass)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ <u>offen</u> und (f_n) eine Folge von komplex diffb Fkt $f_n : D \to \mathbb{C}$, welche <u>lokal glm Konv.</u> Dann ist auch die Grenz-fkt f komplex diffb auf D und die Folge der Ableitungen (f_n') konv lokal glm gegen f'.

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ von Fkt $f_n : D \to \mathbb{C}$ heißt <u>(lokal) glm Konv</u>, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

(lokal) glm Konv.

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ von Fkt f_n: $D \to \mathbb{C}$ heißt <u>normal Konv</u> in D, wenn es zu jedem Pkt $z_0 \in D$ eine Umgebung U und eine Folge $(M_n)_{n \geq 0}$ nicht neg reeller Zahlen gibt, so daß

$$|f_n(z)| \leq M_n$$

für alle $z \in D \cap U$ und alle $n \geq 0$
und

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$$

Satz (Weierstrass)
Eine normal konv Reihe von Fkt konv absolut und lokal glm.

Eine normal konv Funktionen-reihe kann daher beliebig umge-ordnet werden, ohne daß sich an der Konvergenz oder dem

Grenzwert etwas ändert.

Satz (Weierstrass)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, $f_n : D \to \mathbb{C}$ komplex diffb, D offen, eine normal konv Reihe. Dann ist die Grenzfkt $f : D \to \mathbb{C}$ ebenfalls komplex diffb und

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ konv ebenfalls normal.

8.2 Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$. Der Punkt z_0 heißt Entwicklungspkt.

Satz

Zu der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

gibt es eine eindeutig bestimmte

Zahl $r \in [0, \infty]$, so daß die Reihe in der offenen Scheibe $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ <u>normal</u> konv. und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > r$ <u>nicht</u> konv.

Die Zahl r heißt <u>Konvergenzradius</u> der Potenzreihe. Im Fall $r = \infty$ ist $D_r(z_0) = \mathbb{C}$.

Über das Verhalten der Potenzreihe im Rand des Konvergenzkreises, d.h. für $|z - z_0| = r$

kann man keine allgemeinen Aussagen machen.

Bsp

1) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

hat Konvergenzradius 1. Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv. die Reihe für alle z mit $|z| \leq 1$.

2) Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

hat Konvergenzradius 1. Sie konv aber für kein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, denn $(|z|^n)$ ist in diesem Fall keine Nullfolge.

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann ist $r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ sofern der Limes existiert. Existiert $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$ so ist $r = \frac{1}{\rho}$.

Aus dem Satz von Weierstrass für normal konv. Reihen folgt

Satz

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann stellt die Reihe auf $D_r(z_0)$ eine komplex diffb Fkt dar. Die Ableitung ergibt sich durch gliedweise Differentiation der Reihe.

<u>Theorem</u> (Cauchy)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Die Kreisscheibe $D_R(z_0)$ liege ganz in D. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für alle $z \in D_R(z_0)$ mit

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \varrho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi$$

wobei $0 < \varrho < R$.

Bew

Sei $0 < \varrho < R$. Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

für $z \in D_\varrho(z_0)$. Mit

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \Bigg(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} (z - z_0)^n} \Bigg) d\xi$$

glm konv als Fkt
von ξ für $|\xi - z_0| = \rho$,
da $f(\xi)$ für $|z - z_0| = \rho$
beschränkt ist

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi$$

$$= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$\uparrow$

Cauchysche
Integralformeln

Die Koeff a_n sind also von ρ unabh. Jede Wahl von ρ führt auf dieselbe Entwicklung.

Somit ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

auf ganz $D_R(z_0)$

$\square$

Wenn sich eine Fkt f auf einer Scheibe um z_0 in eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

entwickeln läßt, so gilt notwendig

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

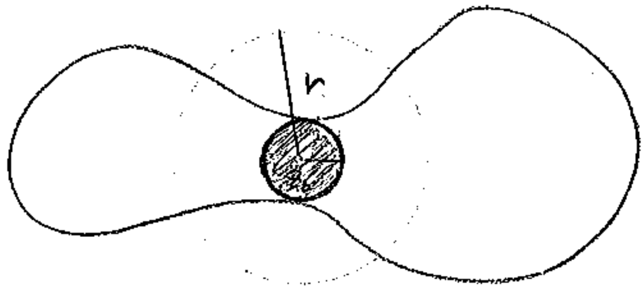
denn man erhält die Ableitung von f durch gliedweises

Ableiten der Potenzreihe.

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: D \to \mathbb{C}$ komplex diffb. Dann läßt sich f lokal in eine Potenzreihe entwickeln, d.h. zu jedem z_0 gibt es ein $R > 0$, so daß

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für alle $z \in B_R(z_0)$. Der Konvergenzradius r dieser Potenzreihe ist insbesondere $\geq R$.



Theorem

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: D \to \mathbb{C}$.
Dann sind äquivalent

1) f ist komplex diff'b auf D
2) f ist total differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemannschen DGL

3) f besitzt lokal eine Stamm-funktion

4) f ist lokal durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar.

// 26.1.10

<u>Satz</u>

Seien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

zwei Potenzreihen, die in einer Umgebung von z_0 konvergieren

und dort dieselbe Fkt darstellen.
Dann gilt

$$a_n = b_n$$

für alle n.

8.3 Abbildungseigenschaften komplex diffb. Funktionen

Identitätssatz

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g: D \longrightarrow \mathbb{C}$ zwei komplex diffb Fkt. Dann sind äquivalent

1) $f = g$

2) Die Koinzidenzmenge $\{z \in D \mid f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt in D.

3) Es gibt einen Punkt $z_0 \in D$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle n.

Satz von der Gebietstreue

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine nicht konstante komplex diffb Fkt. Dann ist $f(D)$ wieder ein Gebiet.

Dieser Satz ist falsch im Reellen.

z.B. ist $[-1,1] = \sin(\mathbb{R})$ kein Gebiet.

<u>Satz</u> (Maximumsprinzip)
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein <u>Gebiet</u> und $f : D \to \mathbb{C}$ eine komplex diff'b. Fkt. Hat f in D ein Betragsmaximum, d.h. es gibt ein $z_0 \in D$ so daß $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in D$, so ist f konstant.

<u>Bew</u>
Ist f nicht konstant, so ist $f(D)$ ein Gebiet, insbesondere

also offen. Dann gibt es eine Umgebung $D_\varepsilon(f(z_0))$, die ganz in D liegt. Dann gibt es aber auch Pkt z mit $|f(z)| > |f(z_0)|$.

□

8.4 Singularitäten

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: D \to \mathbb{C}$ komplex diff'b. Sei $a \in \mathbb{C}$ ein Pkt, der nicht zu D gehört, aber die Eigenschaft hat, daß für ein $r > 0$ die punktierte Kreisscheibe

$$\dot{D}_r(a) = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r \}$$

ganz in D enthalten ist. Dann heißt a eine <u>isolierte Singularität</u> von f. Die Menge $D \cup \{a\} = D \cup \dot{D}_r(a)$ ist offen. Es kann sein, daß f in den Pkt a komplex diffb fortgesetzt werden kann.

Eine isolierte Singularität a einer komplex diffb Fkt $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, heißt <u>hebbar</u>, wenn

wenn f sich auf ganz $D \cup \{a\}$ komplex diffb fortsetzen läßt (d.h. es gibt eine komplex diffb Fkt $\tilde{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|_D = f$)

<u>Bsp</u>

$f(z) = \frac{\sin z}{z}$ hat eine hebbare Sing in $a = 0$. Die Fkt wird komplex diffb fortgesetzt durch $f(0) = 1$.

<u>Riemannscher Hebbarkeitssatz</u>

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ <u>offen</u>, $f : D \to \mathbb{C}$ komplex diffb und $a \in \mathbb{C}$ eine <u>isolierte</u> Sing von f. Dann gilt:

f hat genau dann eine hebbare Sing in a, wenn f in einer punktierten Umgebung $\dot{D}_r(a)$ beschränkt ist.

<u>Bew</u>

Ist die Sing a hebbar, so ist die Fortsetzung $\hat{f}$ von f in einer Umgebung $D_r(a)$ komplex diffb und stetig und somit auf einer punkt Umgebung beschränkt.

Sei f auf $\dot{D}_r(a)$ beschränkt. Def

$$h : D_r(a) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & , z \neq a \\ 0 & , z = a \end{cases}$$

Dann ist h diff'b auf $\dot{D}_r(a)$ und sogar auf ganz $D_r(a)$, denn

$$\lim_{z \to a} \frac{h(z) - h(a)}{z-a}$$

$$= \lim_{z \to a} \frac{(z-a)^2 f(z)}{z-a}$$

$$= \lim_{z \to a} (z-a) \underbrace{f(z)}_{\substack{\text{beschränkt} \\ \text{auf } \dot{D}_r(a)}} = 0$$

existiert. h läßt sich somit auf $D_r(a)$ in eine Potenzreihe entwickeln. Sei

$$h(z) = \underbrace{c_0}_{=0} + \underbrace{c_1}_{=0}(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

$$= c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \dots$$

weil $h(a) = h'(a) = 0$. Es folgt für $z \neq a$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^2} h(z)$$

$$= c_2 + c_3(z-a) + c_4(z-a)^2$$

$$+ \dots$$

Die Potenzreihe

$$\tilde{f}(z) = c_2 + c_3(z-a) + c_4(z-a)^2 + \dots$$

hat Konvergenzradius $\geq r$ und def somit eine komplex diff'b Fkt auf $D_r(a)$. $\tilde{f}$ ist die gesuchte Fortsetzung von f.

$\square$

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: D \to \mathbb{C}$ komplex diff'b und $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Sing. a heißt <u>nicht wesentliche</u> Sing, wenn es ein $m \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß die Fkt

$$(z-a)^m f(z)$$

eine hebbare Sing in $z=a$ hat.

Gibt es eine Umgebung von a, auf der f nicht identisch verschwindet, so existiert in diesem Fall eine <u>kleinste</u> ganze Zahl k, so daß

$$(z-a)^k f(z)$$

eine hebbare Sing hat.

k ist durch die beiden Eigenschaften

1) $h(z) = (z-a)^k f(z)$ hat eine hebbare Sing in $z = a$

2) $h(a) \neq 0$

charakterisiert.

$\operatorname{ord}(f,a) = -k$ heißt Ordnung von f in a.

Ist $\operatorname{ord}(f,a) < 0$ so heißt a Pol von f. In diesem Fall nennt man $k = -\operatorname{ord}(f,a)$ die Polordnung von f in a.

Es gilt

1) $\operatorname{ord}(f, a) \geq 0 \iff$ a ist hebbar

$\operatorname{ord}(f, a) > 0 \iff$ a ist hebbar und $f(a) = 0$

$\operatorname{ord}(f, a) = 0 \iff$ a ist hebbar und $f(a) \neq 0$

2) $\operatorname{ord}(f, a) < 0 \iff$ a ist ein Pol

<u>Bsp</u>

1) $f(z) = (z-1)^5 + 2(z-1)^6$

$$= (z-1)^5 \underbrace{(1 + 2(z-1))}_{h(z)}$$

Also $\operatorname{ord}(f, 1) = 5$.

2) $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2}\underbrace{(1+z)}_{h(z)}$

Also $\operatorname{ord}(f,0) = -2$, d.h. f hat einen Pol der Ordnung 2 in 0.

Ist $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, eine komplex diffb Fkt, die bei a einen <u>Pol</u> hat, so gilt

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$$

($h(z) = (z-a)^k f(z)$, $k > 0$ impl

$$|f(z)| = \frac{1}{|z-a|^k} \underbrace{|h(z)|}_{\text{beschränkt}} \xrightarrow[z \to a]{} \infty \quad)$$

Sei $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, komplex diffb. Eine Sing $a \in \mathbb{C}$ heißt <u>wesentlich</u>, wenn a keine nicht wesentliche Sing ist

<u>Satz</u> (Casorati - Weierstraß)
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: D \to \mathbb{C}$ komplex diffb. Sei a eine <u>wesentliche</u> Sing von f und $\dot{D}_r(a)$ eine beliebige punkt Umgebung von a. Dann gibt es zu jedem $b \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ ein $z \in \dot{D}_r(a) \cap D$ mit

$$|f(z) - b| < \varepsilon$$

(Die Fkt f kommt also in einer beliebig kleinen punktierten Umgebung von a jedem Wert beliebig nahe.)

<u>Bew</u>

Angenommen es gibt ein $b \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$|f(z) - b| \geq \varepsilon$$

für alle $z \in \dot{D}_r(a) \cap D$. Dann ist

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - b}$$

in einer punktierten Umgebung von

a beschränkt. Aus dem Riemann-schen Hebbarkeitssatz folgt, daß g in $z = a$ eine <u>hebbare</u> Sing hat.

Dann hat

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$$

eine <u>nicht wesentliche</u> Sing in a.

(Sei $g(z) = (z-a)^k h(z)$ mit $h(a) \neq 0$.
Dann ist

$$f(z) = (z-a)^{-k} \underbrace{\frac{1}{h(z)}}_{\substack{\text{komplex diffb}\\ \text{auf Umgebung}\\ \text{von } a}} + b \qquad)$$

□

<u>Theorem</u> (Klassifikation von Sing)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: D \to \mathbb{C}$ komplex diffb und $a \in \mathbb{C}$ <u>isolierte Sing</u> von f. Dann gilt

1) a ist hebbar $\Leftrightarrow$

f ist in einer geeigneten punkt. Umgebung von a beschränkt

2) a ist ein Pol $\Leftrightarrow$

$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$

3) a ist wesentlich $\Leftrightarrow$

In jeder noch so kleinen punkt Umgebung von a kommt f

jedem Wert $b \in \mathbb{C}$ beliebig nahe

// 1.2.10

<u>Bsp</u>

1) $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto \frac{e^z}{z}$$

hat einen Pol der Ordnung 1 in 0

denn

$$z f(z) = e^z$$

hat eine hebbare Sing in $z = 0$

und $e^0 = 1$.

2) $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto \frac{(e^z - 1)^2}{z^2}$$

hat eine hebbare Sing bei $z = 0$:

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$(e^z-1)^2 = \left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)^2$$

$$= z^2 + 2\,\frac{z^3}{2} + \dots$$

Cauchy Prod

$$= z^2 + z^3 + \dots$$

$$\frac{(e^z-1)^2}{z^2} = 1 + z + \dots$$

Die Fkt wird durch $f(0) = 1$ komplex diffb fortgesetzt.

3) Sei $D = \dot{D}_{2\pi}(0)$ und

$$f : D \to \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{z}{e^z - 1}$$

Dann ist

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{g(z)}$$

mit

$$g(z) = \frac{1}{z}(e^z - 1)$$

$$= \frac{1}{z}\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right)$$

$$= 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \dots = \tilde{g}(z)$$

$\tilde{g}(z)$ ist komplex diffb für $z \in \mathbb{C}$ und $\tilde{g}(0) = 1$. Somit ist $\tilde{g}$ auf einer ganzen Scheibe $D_\varepsilon(0)$ ungleich 0 und $\frac{1}{\tilde{g}}$ ist auf $D_\varepsilon(0)$

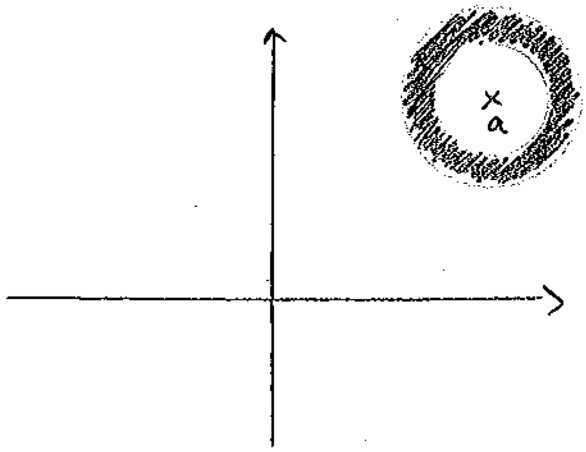
komplex diffb. Also hat f eine hebbare Sing in $z=0$ und wird durch $f(0)=1$ komplex diffb fortgesetzt.

4) Die Fkt $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ hat eine wesentliche Sing bei $z=0$.

8.5 Laurent-Reihen

Im folgenden sei $0 \leq r < R \leq \infty$ ($r=0$ und $R=\infty$ sind zugelassen).
Wir untersuchen komplex diffb Fkt auf dem Ringgebiet

$$K_{r,R}(a) = \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R \}$$



<u>Satz</u> (Laurent-Zerlegung)

Sei f komplex diffb auf dem Kreisring $K_{r,R}(a)$. Dann gibt es komplex diffb Fkt

$$f_1 : D_1 \to \mathbb{C}$$

$$D_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| > r \}$$

$$= \mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a)$$

$$f_2 : D_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$D_2 = D_R(a)$$

so daß auf $K_{r,R}(a) = D_1 \cap D_2$

$$f = f_1 + f_2$$

ist. Dabei kann f_1 so gewählt werden, daß $\lim\limits_{z \to \infty} |f_1(z)| = 0$ gilt.

Durch diese Bed werden f_1 und f_2 eindeutig festgelegt.

f_1 wird als <u>Hauptteil</u> und f_2 als <u>Nebenteil</u> von f bez.

Der Nebenteil f_2 läßt sich auf D_2 in eine konv Potenzreihe entwickeln.

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Die Fkt

$$g : \dot{D}_{1/r}(a) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto f_1\left(\frac{1}{z-a} + a\right)$$

ist komplex diffb

(Sei $w = \frac{1}{z-a} + a$. Dann ist

$$|w-a| = \frac{1}{|z-a|} > r$$

für $z \in \dot{D}_{1/r}(a)$)

Es ist $\lim\limits_{z \to a} g(z) = \lim\limits_{z \to \infty} f_1(z) = 0$,

d.h. g ist auf einer punktierten Umgebung von a beschränkt.

Somit ist $z = a$ hebbare Sing von g und g wird durch $g(a) = 0$ komplex diffb fortgesetzt. g hat auf $D_{1/r}(a)$ eine Potenzreihenentwicklung

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

Aus $g(z) = f_1(\underbrace{\tfrac{1}{z-a} + a}_{w})$ folgt

$$f_1(w) = g\left(\frac{1}{w-a} + a\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (w-a)^{-n}$$

für $|w-a| > r$. Die Reihe konv normal. Def $a_n = b_{-n}$. Dann

$$f_1(w) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (w-a)^n$$

<u>Satz</u>

Sei f komplex diffb auf $K_{r,R}(a)$.

Dann besteht dort die Darst

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Die erste Reihe konv auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a)$ <u>normal</u> gegen den Hauptteil von f und die zweite Reihe auf $D_R(a)$ <u>normal</u> gegen den Nebenteil von f.

Die Koeffizienten sind durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - a| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \, d\xi$$

mit $r < \rho < R$ gegeben.

Bew

Wir müssen nur die Formel für die a_n beweisen. Es ist

$$f(z) = \sum_{m=-1}^{-\infty} a_m (z-a)^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-a)^m$$

so daß für $n \in \mathbb{Z}$

$$(z-a)^{-n-1} f(z)$$

$$= \sum_{m=-1}^{-\infty} a_m (z-a)^{m-n-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-a)^{-m-n-1}$$

Die Reihen auf der rechten Seite konv normal. Somit ist für

$r < \rho < R$

$$\oint_{|z-a|=\varrho} (z-a)^{-n-1} f(z)\, dz$$

$$= \sum_{m=-1}^{-\infty} a_m \oint_{|z-a|=\varrho} (z-a)^{m-n-1}\, dz$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} a_m \oint_{|z-a|=\varrho} (z-a)^{m-n-1}\, dz$$

$$= a_n \oint_{|z-a|=\varrho} (z-a)^{-1}\, dz = 2\pi i\, a_n$$

$(z-a)^{m-n-1}$ hat eine Stammfkt falls $m-n-1 \neq -1$

$\square$

Eine Laurent-Reihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Sie heißt konvergent, wenn die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

konv. Der Wert von $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$

in z_1 ist dann die Summe von

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z_1-a)^{-n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1-a)^n.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$ heißt <u>Hauptteil</u> und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ <u>Nebenteil</u> der Laurent-Reihe.

Absolute, gleichmäßige oder normale Konvergenz einer Laurent-Reihe sollen dann die entsprechende Konv. von Haupt- und Nebenteil bedeuten.

<u>Identitätssatz</u>

Seien

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

zwei Laurent-Reihen, die auf einem nicht leeren Kreisring dieselbe Fkt darstellen. Dann ist

$$a_n = b_n$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

<u>Bew</u>

Sei $K_{r,R}(a)$ der nicht leere Kreisring auf dem die Laurent-Reihen dieselbe Fkt darstellen. Dort ist

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z-a)^m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m (z-a)^m$$

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Mult mit $(z-a)^{-n-1}$.

liefert

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z-a)^{m-n-1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m (z-a)^{m-n-1}$$

und für $r < \varrho < R$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \oint_{|z-a|=\varrho} (z-a)^{m-n-1} \, dz$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \oint_{|z-a|=\varrho} (z-a)^{m-n-1} \, dz$$

Die Integrale verschwinden falls $m-n-1 \neq -1$, d.h. $m \neq n$. Also

$$a_n 2\pi i = b_n 2\pi i$$

$\square$

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: D \to \mathbb{C}$ komplex diffb und $a \in \mathbb{C}$ Sing von f. Dann ist f auf einem geeigneten Kreisring $K_{0,r}(a)$ komplex diffb und hat eine Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

um a. Den Typ der Sing kann man an dieser Reihe ablesen.

Satz

Es gilt

1) a ist hebbar $\Leftrightarrow$

$a_n = 0$ für alle $n < 0$

2) a ist ein <u>Pol</u> der Ordnung k $(k > 0)$ $\Leftrightarrow$

$a_{-k} \neq 0$ und $a_{-n} = 0$ für alle $n > k$.

3) a ist <u>wesentlich</u> $\Leftrightarrow$

$a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$

<u>Bsp</u>

1) $f(z) = e^{1/z}$ hat die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z^{-1})^n$$

$$= 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}}_{\text{Hauptteil}}$$

auf $K_{0,\infty}(0) = \mathbb{C}^*$. Die Sing in

$z=0$ ist wesentlich.

2) Die Fkt

$$f(z) = \frac{2}{z^2-4z+3}$$

ist komplex diffb auf $\mathbb{C} \setminus \{1,3\}$

Wir entwickeln f in den 3

Ringgebieten

$0<|z|<1$, $1<|z|<3$, $3<|z|$

in Laurent-Reihen.

Die Partialbruchzerlegung von

f lautet

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-3}$$

a) Für z mit $0 < |z| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-z/3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n$$

Daher ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n$$

für $|z| < 1$. Die Laurent-Reihe ist in diesem Fall die Potenzreihe um 0.

b) Für z mit $1 < |z| < 3$ ist

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-z/3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n$$

Also

$$f(z) = \underbrace{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}}_{\text{Hauptteil}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n$$

c) Für $|z| > 3$ ist

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-3/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n$$

so daß

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(3^{n-1} - 1\right) \frac{1}{z^n}$$

// 2.2.10

8.6 Der Residuensatz

Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene stückweise glatte Kurve, deren Bild $z \in \mathbb{C}$ nicht enthält. Die Umlaufzahl von α bzgl z ist def als

$$\chi(\alpha, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{1}{\xi - z} \, d\xi$$

Bsp

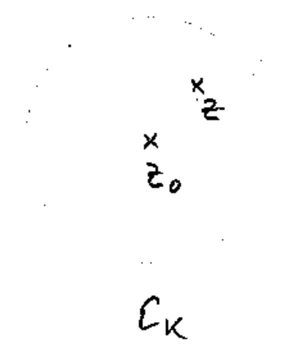
Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

$$\varepsilon_k(t) = z_0 + r e^{2\pi i k t}, \quad 0 \le t \le 1$$

beschreibt die k-fach durchlaufene Kreislinie mit MittelpKt z_0 und

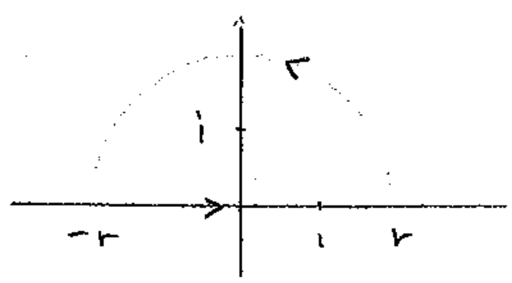
Radius r. Es gilt

$$\chi(C_K, z) = \begin{cases} K & \text{wenn } |z-z_0|<r \\ 0 & \text{wenn } |z-z_0|>r \end{cases}$$



Die Berechnung der Umlaufzahl kann durch Deformation von α oft vereinfacht werden.

<u>Bsp</u>



Sei $r > 0$ und

$$\alpha(t) = \begin{cases} tr & -1 \le t \le 1 \\ re^{i(t-1)} & 1 \le t \le \pi + 1 \end{cases}$$

Dann ist

$$\chi(\alpha, i) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } r > 1 \\ 0 & \text{wenn } r < 1 \end{cases}$$

denn wir können das Integral von $-r$ bis r durch ein Integral über einen Halbkreisbogen ersetzen. ($f(z) = \frac{1}{z-i}$ ist komplex diffb auf dem Sterngebiet $D = \mathbb{C} \setminus \{ ix \mid x \ge 1 \}$ Nach dem

Cauchyschen Integralsatz hängen Wegintegrale über f in D nur vom Anfangs- und Endpkt ab.)

Anschaulich mißt die Umlaufzahl, wie oft ein Pkt von der Kurve umlaufen wird.

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: D \to \mathbb{C}$ komplex diffb und $a \in \mathbb{C}$ ein Sing von f. Sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

die Laurent-Entwicklung von f

an der Stelle a. Dann heißt der Koeffizient a_{-1} das Residuum von f an der Stelle a. Man schreibt

$$\operatorname{Res}(f, a) = a_{-1}$$

Nach der Formel für die Entwicklungskoeff ist

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\varrho} f(z)\, dz$$

für genügend kleines ϱ.

Bsp

1) Sei $f(z) = 1/z$. Dann ist

$\mathrm{Res}(f, 0) = 1$

2) Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ und $f(z) = z^n$.

Dann ist $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$

3) Ist a eine hebbare Sing von f so ist $\mathrm{Res}(f, a) = 0$.

Theorem (Residuensatz)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und seien $z_1, \dots, z_k \in D$ endlich viele paarweise verschiedene Pkt. Ferner sei

$f : D \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \to \mathbb{C}$ komplex diffb und $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_K\}$ eine geschlossene stückweise glatte Kurve. Dann gilt

$$\oint_\alpha f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{K} \mathrm{Res}(f, z_j)\, \chi(\alpha, z_j)$$

Bew

Wir entwickeln f um jede der Sing z_j in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(j)} (z - z_j)^n$$

Dann ist

$$\mathrm{Res}(f, z_j) = a_{-1}^{(j)}$$

Der Hauptteil der Laurent-Entw in z_j

$$h_j(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n^{(j)} (z - z_j)^n$$

ist komplex diffb auf $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$

Somit hat die Fkt

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{K} h_j(z)$$

hebbare Sing in den z_j, $1 \le j \le K$.

Da D ein Sterngebiet ist folgt

$$0 = \int_\alpha g(z)\, dz$$

$$= \int_\alpha f(z) dz - \sum_{j=1}^{K} \int_\alpha h_j(z)\, dz$$

$$= \int_\alpha f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{K} \int_\alpha \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n^{(j)} (z-z_j)^n \,dz$$

$$= \int_\alpha f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{K} \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n^{(j)} \underbrace{\int_\alpha (z-z_j)^n \,dz}_{= \begin{cases} 2\pi i\, \varkappa(\alpha, z_j), & n=-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}}$$

Die Laurent-Reihe konv normal auf $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ und somit lokal glm

$$= \int_\alpha f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{K} a_{-1}^{(j)}\, 2\pi i\, \varkappa(\alpha, z_j).$$

$\square$

<u>Bem</u>

1) Der Satz gilt auch für einfach zusammenhängende Gebiete

2) Der Satz verallgemeinert den Cauchyschen Integralsatz

Methoden zur Berechnung von Residuen:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in D$, $f, g : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ komplex diffb und a <u>nicht</u> wesentliche Sing von f und g. Dann gilt

1) Ist a ein Pol der Ordnung 1 von f, so gilt

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

2) Ist a ein Pol der Ordnung k von f, so gilt

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(k-1)!} \tilde{f}^{(k-1)}(a)$$

mit $\tilde{f}(z) = (z-a)^k f(z)$

3) Ist $\operatorname{ord}(f,a) \geq 0$ und $\operatorname{ord}(g,a) = 1$, so gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

$$\left(\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \lim_{z \to a} (z-a) \frac{f(z)}{g(z)} \right.$$

$$\left. \underset{g(a)=0}{=} \lim_{z \to a} \frac{f(z)}{\frac{g(z)-g(a)}{z-a}} = \frac{f(a)}{g'(a)} \right)$$

Mit dem Residuensatz lassen sich reelle Integrale berechnen

<u>Satz</u>

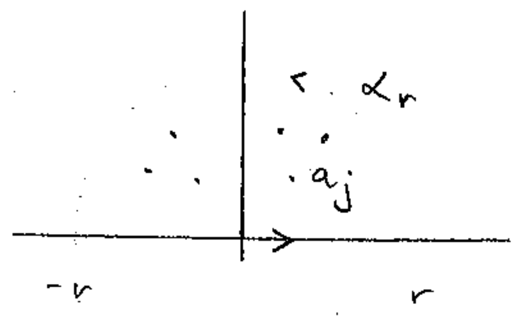
Seien p, q zwei komplexe Polynome mit $\operatorname{grad}(q) \geq \operatorname{grad}(p) + 2$. Das Polynom q habe <u>keine</u> reelle Nullstelle. Sei $f = \frac{p}{q}$ und seien $a_1, \ldots, a_k$ die Pole von f mit $\operatorname{Im}(a_j) > 0$.

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, a_j)$$

Bew

α setze sich zusammen aus der Strecke von $-r$ bis r und dem Halbkreisbogen α_r



r sei so groß gewählt, daß die Pole a_j innerhalb von α liegen. Dann ist

$$\chi(\alpha, a_j) = 1$$

Nach dem Residuensatz ist

$$2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, a_j) = \int_{\alpha} f(z)\,dz$$

$$= \int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_{\alpha_r} f(z)\,dz$$

Es gibt ein $M > 0$, so daß

$$|f(z)| = \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \le M/z^2$$

für $|z|$ hinreichend groß.

Für hinreichend großes r ist also

$$\left| \int_{\alpha_r} f(z)\,dz \right| \le \pi r \, M/r^2 = \frac{\pi M}{r} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

Es folgt

$$\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, a_j)$$

$\square$

Analog zeigt man

<u>Satz</u>

Seien p, q zwei Polynome mit $\operatorname{grad}(q) \ge \operatorname{grad}(p) + 2$. Das Polynom q habe keine reelle Nullstelle. Seien $a_1, \dots, a_k$ die Nullstellen von q

mit $\operatorname{Im}(a_j) > 0$. Sei $\alpha > 0$ und

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} e^{i\alpha z}$$

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{i\alpha x} \, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, a_j)$$

(Es ist

$$|e^{i\alpha z}| \underset{z = x+iy}{=} |e^{i\alpha x} e^{-\alpha y}| = e^{-\alpha y} \leq 1$$

für $\alpha > 0$, $y \geq 0$)

Der Satz gilt auch schon, wenn $\operatorname{grad}(q) \geq \operatorname{grad}(p) + 1$.

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

Die Fkt $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$

hat einen Pol der Ordnung 1 in i.

Also

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{1}{\frac{d}{dz}(1+z^2)\big|_{z=i}} = \frac{1}{2z|_{z=i}}$$

$$= \frac{1}{2i}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \frac{1}{2i}$$

$$= \pi$$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx$$

(Die Gl $z^n - 1 = 0$ hat n verschiedene Nullstellen, nämlich

$$\xi_k = e^{2\pi i k/n} \quad , \quad k = 0, \dots, n-1 \quad)$$

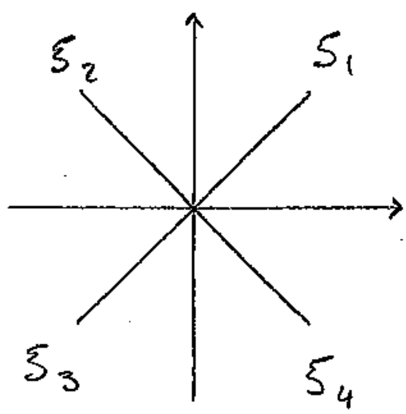
Die Nullstellen von $z^4 + 1$ sind

$$\xi_1 = e^{2\pi i /8}$$

$$\xi_2 = e^{2\pi i \, 3/8}$$

$$\xi_3 = e^{2\pi i \, 5/8}$$

$$\xi_4 = e^{2\pi i \, 7/8}$$



Also

$$1 + z^4 = (z - \xi_1)(z - \xi_2)(z - \xi_3)(z - \xi_4)$$

$1+z^4$ hat eine Nullstelle der Ord 1

in $z = \xi_1$ und $z = \xi_2$. Sei

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

Dann ist

$$\operatorname{Res}(f, \xi_1) = \frac{1}{\frac{d}{dz}(1+z^4)\big|_{z=\xi_1}} = \frac{1}{4\xi_1^3}$$

$$\operatorname{Res}(f, \xi_2) = \frac{1}{4\xi_2^3}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx = 2\pi i \left(\frac{1}{4\xi_1^3} + \frac{1}{4\xi_2^3} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} i \left(\frac{\xi_2^3 + \xi_1^3}{(\xi_1 \xi_2)^3} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} i \quad \frac{\xi_1 + \xi_2}{(-1)^3}$$

$$= -\frac{\pi}{2} i \, i \sqrt{2} \quad = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} \, dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} \, dx$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2} = \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}$$

hat einen Pol der Ordnung 1 in i.

Also

$$\mathrm{Res}(f, i) = \frac{e^{-1}}{\frac{d}{dz}(1+z^2)\big|_{z=i}} = \frac{1}{2i} \frac{1}{e}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$= \mathrm{Re}\Big(2\pi i \ \mathrm{Res}(f, i)\Big)$$

$$= \mathrm{Re}\left(2\pi i \ \frac{1}{2i} \ \frac{1}{e} \right) = \frac{\pi}{e} \qquad \square$$