7. Komplexe Integration

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Wir untersuchen nun die Frage, wann f eine Stammfkt hat, d.h. eine Fkt $F: D \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$ existiert. Die zentralen Resultate sind der Cauchysche Integralsatz und die Cauchyschen Integralformeln.

7.1 Komplexe Kurvenintegrale

Die Fkt $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ heißt <u>integrabel</u>, wenn

Re(f) und Im(f) integrabel sind.

Man def

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,dx$$

Die aus der reellen Analysis bekannten Resultate, wie z.B. Linearität, Substitutionsregel, part. Integration und die Berechnung durch die Stammfkt, gelten analog.

Eine Kurve ist eine stetige Abb

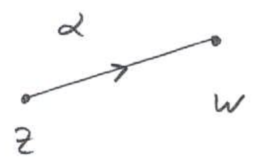
$$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Bsp

1) Die Verbindungsstrecke zwischen 2 Pkt $z, w \in \mathbb{C}$

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto z + t(w-z)$$



2) Die k-fach durchlaufene Einheitskreislinie, $k \in \mathbb{Z}$

$$\varepsilon_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto e^{2\pi i k t}$$

Eine Kurve heißt glatt, wenn sie stetig differenzierbar ist.

Eine Kurve heißt stückweise glatt, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$$

gibt, so daß die Einschränkungen

$$\alpha_i = \alpha|_{[a_i, a_{i+1}]}$$

$0 \le i < n$, glatt sind.

Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine glatte Kurve und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig mit $\alpha([a,b]) \subset D$. Dann ist das

Kurvenintegral von f über α

def als

$$\int_\alpha f = \int_\alpha f(z)\,dz = \int_a^b f(\alpha(t))\,\alpha'(t)\,dt$$

(Integral über stetige Fkt)

Ist α stückweise glatt, so def man

$$\int_\alpha f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i} f$$

(Diese Zahl hängt nicht von der Wahl der Zerlegung ab.)

Die Bogenlänge einer glatten Kurve ist def als

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| \, dt$$

Die Bogenlänge einer stückweise glatten Kurve ist

$$L(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} L(\alpha_i)$$

Bsp

1) Die Bogenlänge der Verbindungsstrecke zwischen z und w ist

$$L(\alpha) = |z-w|$$

2) Die Bogenlänge der k-fach durchlaufenen Einheitskreislinie ist

$$L(\alpha) = 2\pi \, |k|$$

Das komplexe Kurvenintegral hat folgende Eigenschaften

1) $\int_\alpha f$ ist $\mathbb{C}$-linear in f

2) Es gilt

$$\left| \int_\alpha f \right| \leq C\, L(\alpha)$$

wenn $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in \mathrm{Im}(\alpha)$

3) Transformationsinvarianz:

Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Kurve, $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Fkt, $\alpha([a,b]) \subset D \subset \mathbb{C}$

und $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ eine <u>stetig diffb</u> Fkt mit $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Dann gilt

$$\int_\alpha f = \int_{\alpha\circ\varphi} f$$

(Das folgt aus der Substitutions-regel

$$\int_{\alpha\circ\varphi} f = \int_c^d f((\alpha\circ\varphi)(t))\,(\alpha\circ\varphi)'(t)\,dt$$

$$= \int_c^d (f\circ\alpha)(\underbrace{\varphi(t)}_{x})\,\alpha'(\underbrace{\varphi(t)}_{x})\,\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx}$$

$$= \int_a^b f(\alpha(x))\,\alpha'(x)\,dx = \int_\alpha f \quad)$$

4) Sei $D \subset \mathbb{C}$ <u>offen</u>, $f : D \to \mathbb{C}$ <u>stetig</u> und $F : D \to \mathbb{C}$ eine Stammfkt von f, d.h. $F' = f$. Dann gilt für jede glatte Kurve $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\alpha([a,b]) \subset D$

$$\int_\alpha f = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a))$$

Eine Kurve $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt <u>geschlossen</u>, wenn $\alpha(a) = \alpha(b)$.

<u>Satz</u>

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig

und f habe eine Stammfkt.
Dann gilt für jede geschlossene stückweise glatte Kurve mit $\mathrm{Im}(\alpha) \subset D$

$$\int_\alpha f = 0$$

Sei $r > 0$. Die Kurve

$$\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto r e^{it}$$

beschreibt eine einfach durchlaufene Kreislinie. Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int_\alpha z^n \, dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{falls } n = -1 \end{cases}$$

(Jst $n \neq -1$ so hat $f(z) = z^n$ die Stammfkt $F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$. Falls $n = -1$ so gilt

$$\int_\alpha z^{-1}\, dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^{-1} \underbrace{(re^{it})'}_{ire^{it}} dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$)

Somit hat die stetige Fkt

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto z^{-1}$$

<u>keine</u> Stammfkt auf $\mathbb{C}^*$. //

18. 1. 10

7.2 Der Cauchysche Integralsatz

$D \subset \mathbb{C}$ heißt wegzusammenhängend, wenn sich zwei beliebige Pkt in D durch eine stückweise glatte Kurve, die ganz in D liegt, verbinden lassen.

Ist D wegzusammenhängend, so auch zusammenhängend.
Ist D offen, so gilt auch die Umkehrung.

$D \subset \mathbb{C}$ heißt Gebiet, wenn D nichtleer, offen und (weg) zshgd ist.

Seien $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\beta : [b,c] \longrightarrow \mathbb{C}$ zwei (stückweise glatte) Kurven mit $\alpha(b) = \beta(b)$. Dann wird durch

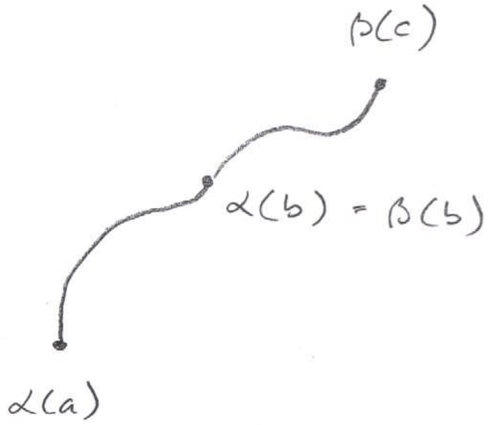
$$\alpha \underset{A}{+} \beta : [a,c] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \alpha(t), & a \le t \le b \\ \beta(t), & b \le t \le c \end{cases}$$

eine (stückweise glatte) Kurve def.

Es gilt

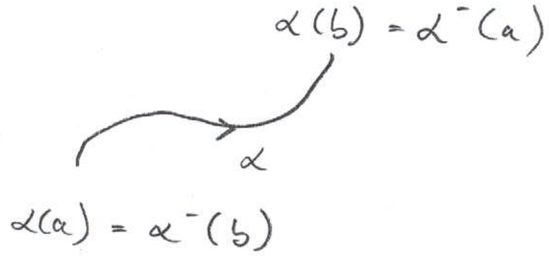
$$\int_{\alpha \underset{A}{+} \beta} f = \int_{A} f + \int_{B} f$$



Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Kurve. Die *inverse* Kurve ist def als

$$\alpha^- : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto \alpha\big((a+b) - t \big)$$



Dann ist

$$\int_\alpha f = - \int_{\alpha^-} f$$

Bis auf weiteres setzen wir Kurven, die im Zusammenhang mit Inte -

gralen auftreten, als stückweise glatt voraus.

<u>Theorem</u>

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein <u>Gebiet</u> und $f : D \to \mathbb{C}$ <u>stetig</u>. Dann sind äquivalent

1) f besitzt eine StammfKt

2) Das Integral von f über jede in D verlaufende geschlossene Kurve verschwindet.

3) Das Integral von f über jede in D verlaufende Kurve hängt nur vom Anfangs- und End-punkt der Kurve ab.

Bew

1) $\Rightarrow$ 2) klar

2) $\Rightarrow$ 3)

Seien $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\beta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$

zwei Kurven in D mit denselben

Anfangs- und Endpkt.

z.Z.

$$\int_\alpha f = \int_\beta f$$

Sei

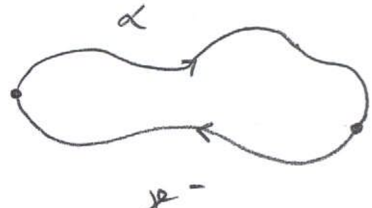
$$\gamma : [b, b+(d-c)] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \beta(t+(c-b))$$

$$(\ \gamma(b) = \beta(c)\ ,\ \gamma(b+(d-c)) = \beta(d)\ )$$

Wegen der Transformationsinv gilt

$$\int_\beta f = \int_\gamma f$$

Nun ist $\alpha \underset{A}{+} \gamma^-$ ein geschlossener Weg, so daß



$$0 = \int_{\alpha \underset{A}{+} \gamma^-} f = \int_\alpha f + \int_{\gamma^-} f = \int_\alpha f - \int_\gamma f$$

$$= \int_\alpha f - \int_\beta f$$

3) $\Rightarrow$ 1)

Wähle $z_* \in D$. Sei $z \in D$ und α eine beliebige Kurve in D, die z_* und z verbindet. Def

$$F(z) = \int_\alpha f(z)\,dz$$

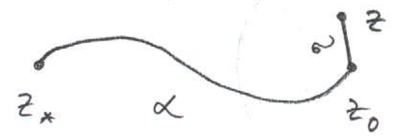
<u>Beh</u> $F' = f$

Sei $z_0 \in D$. Wir zeigen $F'(z_0) = f(z_0)$

Da D offen ist, gibt es ein $\varsigma > 0$, so daß $D_\varsigma(z_0) \subset D$. Sei $z \in D_\varsigma(z_0)$, α eine Kurve von z_* nach z_0 und

$$\sigma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto z_0 + t(z-z_0)$$



Dann ist

$$F(z) = \int_\alpha f + \int_\sigma f$$

$$= F(z_0) + \int_\sigma f(z_0)\,dz$$

$$+ \int_\sigma (f(z) - f(z_0))\,dz$$

$$= F(z_0) + f(z_0)(z-z_0)$$

$$+ \underbrace{\int_\sigma (f(z) - f(z_0))\,dz}_{r(z)}$$

$$= F(z_0) + f(z)(z-z_0) + r(z)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist, gibt es ein $\delta < \varrho$, so daß $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ für $|z - z_0| < \delta$. Es folgt

$$|r(z)| = \left| \int_\sigma (f(z) - f(z_0))\, dz \right|$$

$$\leq \varepsilon\, L(\sigma) = \varepsilon\, |z - z_0|$$

d.h.

$$\left| \frac{r(z)}{z - z_0} \right| \leq \varepsilon$$

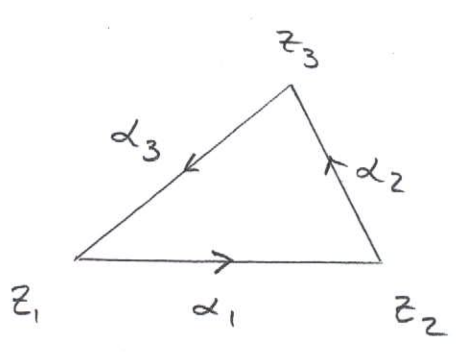
Das bedeutet aber gerade, daß F in z_0 differenzierbar ist und

$F'(z_0) = f(z_0)$.

$\square$

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Das von z_1, z_2, z_3 aufgespannte Dreieck ist

$$\Delta = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 , \quad 0 \leq t_1, t_2, t_3 , \; t_1 + t_2 + t_3 = 1 \}$$



Unter $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ verstehen wir die geschlossene Kurve $\alpha = \alpha_1 \underset{A}{+} \alpha_2 \underset{A}{+} \alpha_3$.

Das Bild von α ist der Rand von Δ.

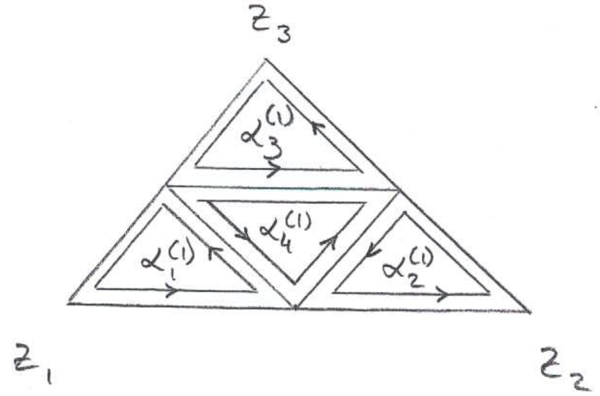
<u>Satz</u> (Goursat)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ <u>offen</u> und $f: D \to \mathbb{C}$ komplex diffb. Seien z_1, z_2, z_3 3 Pkt in $\mathbb{C}$, so daß das von ihnen aufgespannte Dreieck ganz in D enthalten ist. Dann gilt

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(z)\, dz = 0$$

Bew

Sei $\alpha^{(0)} = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$. Wir zerlegen das Dreieck $\Delta^{(0)}$, das von z_1, z_2, z_3 aufgespannt wird, in kleinere Dreiecke durch Halbierung der Seiten



und def die zugehörigen geschlossenen Wege $\alpha_i^{(1)}$, $i = 1, 2, 3, 4$

Dann ist

$$\int_{\alpha^{(0)}} f = \int_{\alpha_1^{(1)}} f + \int_{\alpha_2^{(1)}} f + \int_{\alpha_3^{(1)}} f + \int_{\alpha_4^{(1)}} f$$

und

$$\left| \int_{\alpha^{(0)}} f \right| \leq \sum_{i=1}^{4} \left| \int_{\alpha_i^{(1)}} f \right| \leq 4 \left| \int_{\alpha_j^{(1)}} f \right|$$

für ein j. Def $\alpha^{(1)} = \alpha_j^{(1)}$ und

bez das Dreieck mit Rand $\alpha^{(1)}$

als $\Delta^{(1)}$. Es ist

$$L(\alpha^{(1)}) = \frac{1}{2} L(\alpha^{(0)})$$

Wir zerlegen das Dreieck $\Delta^{(1)}$

analog.

Auf diese Weise erhalten wir eine Folge von Dreiecken

$$\Delta = \Delta^{(0)} \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots$$

mit Rändern

$$\alpha = \alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots$$

Es ist

$$\left| \int_\alpha f \right| \leq 4 \left| \int_{\alpha^{(1)}} f \right| \leq 4^2 \left| \int_{\alpha^{(2)}} f \right|$$

$$\leq \quad \dots$$

d.h.

$$\left| \int_\alpha f \right| \leq 4^n \left| \int_{\alpha^{(n)}} f \right|$$

und

$$L(\alpha^{(n)}) = \frac{1}{2^n} L(\alpha)$$

Die Folge der Dreiecke def einen Pkt z_0, der in allen Dreiecken liegt. Es gilt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + r(z)$$

mit

$$\frac{r(z)}{|z-z_0|} \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$$

Es folgt

$$\int_{\alpha^{(n)}} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\alpha^{(n)}} \left(f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\right) dz}_{0}$$

$$+ \int_{\alpha^{(n)}} r(z)\,dz$$

$$= \int_{\alpha^{(n)}} r(z)\,dz$$

und

$$\left| \int_{\alpha} f(z)\,dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\alpha^{(n)}} r(z)\,dz \right|$$

Wir zeigen nun daß die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 0 geht.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$,

so daß

$$\frac{|r(z)|}{|z-z_0|} < \varepsilon$$

bzw

$$|r(z)| \leq \varepsilon |z-z_0|$$

für alle $z \in D$ mit $|z-z_0| < \delta$.

Für n hinreichend groß ist

$$\Delta^{(n)} \subset D_\delta(z_0)$$

so daß

$$\left| \int_{\alpha^{(n)}} r(z)\, dz \right| \leq \varepsilon L(\alpha^{(n)})^2 \leq \varepsilon \frac{1}{4^n} L(\alpha)^2$$

Weil $|r(z)| \leq \varepsilon |z - z_0| \leq \varepsilon L(\alpha^{(n)})$

für $z \in \mathrm{Im}(\alpha^{(n)})$. Wir erhalten

$$\left| \int_\alpha f(z)\, dz \right| \leq \varepsilon L(\alpha)^2$$

Da dies für alle pos ε gilt, ist

$$\int_\alpha f(z)\, dz = 0 .$$

$\square$

Ein <u>Sterngebiet</u> ist eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft:

Es gibt einen Pkt $z_* \in D$,

so daß für jeden Pkt $z \in D$, die ganze Verbindungsstrecke

$\{z_* + t(z - z_*) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ in D

liegt

Bsp

1) Die offene Kreisscheibe $D_\varepsilon(z)$ ist ein Sterngebiet

2) $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$ ist ein Sterngebiet

3) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist kein Sterngebiet.

Satz

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f: D \to \mathbb{C}$ komplex diffb. Sei α eine in D verlaufende geschlossene Kurve. Dann ist

$$\int_\alpha f(z)\,dz = 0$$

Bew

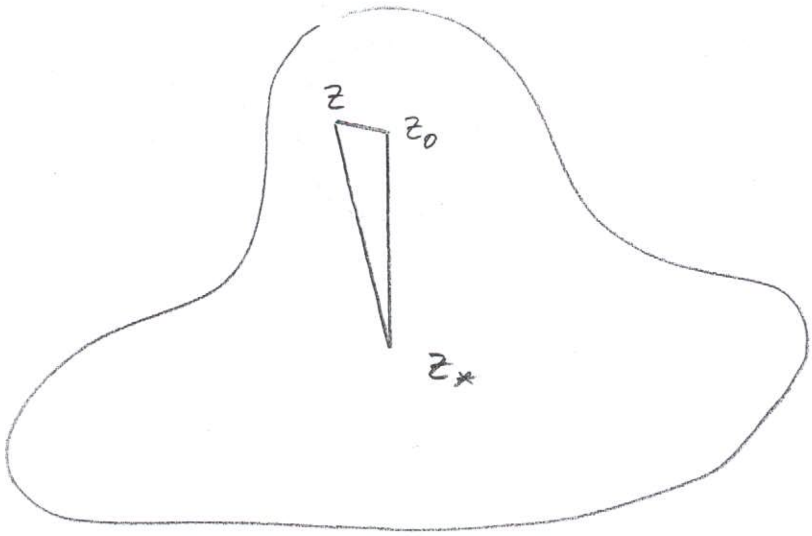
Es reicht z.z. daß f eine Stammfkt auf D besitzt.

Sei z_* ein Sternmittelpkt von D. Wir def

$$F(z) = \int_\alpha f(\xi)\,d\xi$$

wobei α die Verbindungsstrecke von z_* und z ist.

Sei $z_0 \in D$. Dann gibt es eine Kreisscheibe $D_\varepsilon(z_0)$ um z_0, so daß für alle $z \in D_\varepsilon(z_0)$ das Dreieck, das von z_*, z_0, z aufgespannt wird, ganz in D liegt



Nach dem letzten Satz ist

$$\underbrace{\int_{z_*}^{z_0} f}_{F(z_0)} + \int_{z_0}^{z} f + \underbrace{\int_{z}^{z_*} f}_{-F(z)} = 0$$

so daß

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^{z} f$$

Wie im Bew des Theorems in 7.2, 3) $\Rightarrow$ 1) zeigt man nun, daß

$$F'(z_0) = f(z_0)$$

$\square$

Ein **Gebiet** $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich jede geschlossene Kurve in D stetig auf einen Pkt zusammenziehen läßt.

Bsp

1) Sterngebiete sind einfach zusammenhängend.
2) $\mathbb{C}_-$ ist einfach zshgd
3) Die gelochte Scheibe $\{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| < \varepsilon\}$ ist **nicht** einfach zshgd.
4) $\mathbb{C}^*$ ist **nicht** einfach zshgd

Theorem (Cauchyscher Integralsatz)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zshgd Gebiet und $f: D \to \mathbb{C}$ komplex diffb. Dann verschwindet das Int von f über jede geschlossene Kurve in D.

//

19.1.10

7.3 Die Cauchyschen Integralformeln

Satz

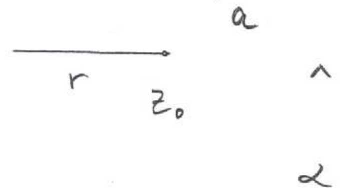
Es gilt

$$\oint_{\alpha} \frac{1}{\xi - a} \, d\xi = 2\pi i$$

wobei $\alpha(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $r > 0$

und a im Inneren des Kreises liegt

($|a - z_0| < r$).



Bew

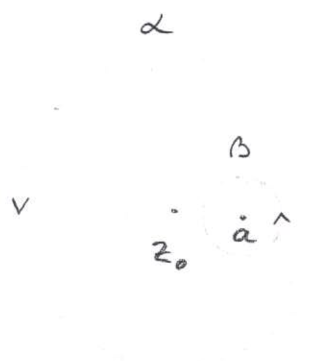
Sei $a = z_0$. Dann ist

$$\oint_\alpha \frac{1}{\xi - a}\, d\xi = \oint_\alpha \frac{1}{\xi - z_0}\, d\xi$$

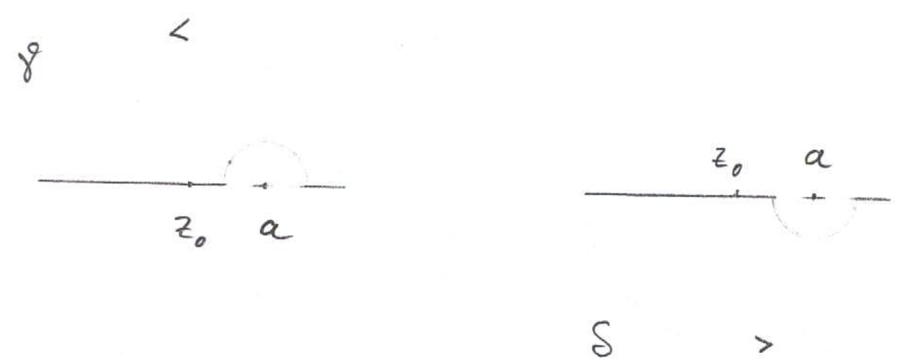
$$= \int_0^{2\pi} f(\alpha(t))\, \alpha'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt$$

$$= 2\pi i$$

Für $a \neq z_0$ folgt die Beh nun aus dem Cauchyschen Integralsatz.



Betrachte die Kurven



Dann ist

$$\int_\gamma \frac{1}{\xi - a}\, d\xi = \int_\delta \frac{1}{\xi - a}\, d\xi = 0$$

so daß

$$0 = \int_\gamma \frac{1}{\xi - a}\, d\xi + \int_\delta \frac{1}{\xi - a}\, d\xi$$

$$= \int_\alpha \frac{1}{\xi - a}\, d\xi - \underbrace{\int_\beta \frac{1}{\xi - a}\, d\xi}_{2\pi i}$$

$\square$

<u>Theorem</u> (Cauchysche Integralformel)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar auf D.

Die abgeschlossene Kreisscheibe

$\overline{D}_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r \}$ liege

ganz in D. Dann gilt für <u>jeden</u>

Punkt $z \in D_r(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

wobei über die Kreislinie $\alpha(t) =$

$z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ integriert wird

<u>Bew</u>

Da $\overline{D}_r(z_0)$ kompakt ist, gibt es ein

$R > r$, so daß

$$D \supset D_R(z_0) \supset \overline{D}_r(z_0)$$

$D_R(z_0)$ ist sternförmig. Sei

$$g : D_R(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$w \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

Dann ist g stetig auf $D_R(z_0)$ und für $w \neq z$ sogar komplex differenzierbar.

Man kann zeigen, daß unter diesen Bed noch der Cauchysche Integralsatz gilt. Damit ist

$$0 = \int_\alpha g(w)\,dw = \int_\alpha \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw$$

$$= \int_\alpha \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\underbrace{\int_\alpha \frac{1}{w-z}\,dw}_{=2\pi i}$$

Also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

□

Die Werte von f im Inneren einer Kreisscheibe sind also durch die Werte auf dem Rand vorgegeben

<u>Theorem</u> (Cauchysche Integralformeln)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar auf ganz D. Dann ist f beliebig oft komplex diff'b.

Die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D}_r(z_0)$ liege in D. Dann gilt für jeden Pkt $z \in D_r(z_0)$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi$$

mit $\alpha(t) = z_0 + r e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

<u>Bew</u>

ξ ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

Man kann unter diesen Bed Differentiation und Integration vertauschen, d.h.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \, d\xi$$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} \, d\xi$$

etc

$\square$

Ist $f = u + iv$ komplex diff'b, so sind beispielsweise u und v unendlich oft stetig differenzierbar.

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt <u>ganz</u>, wenn f komplex differenzierbar ist.

<u>Satz</u> (Liouville)

Sei f eine ganze beschränkte Fkt. Dann ist f konstant

<u>Bew</u>

Sei $|f(z)| \leq c$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir zeigen $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \, d\xi$$

folgt

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{2\pi r}_{\text{Bogenlänge}} \frac{c}{r^2} = \frac{c}{r} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

$$\left(\frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2} \leq \frac{c}{r^2} \text{ für alle } \xi \in \mathbb{C} \right.$$

$$\left. \text{mit } |\xi - z| = r. \right)$$

Also ist $f'(z) = 0$. $\square$

$\leadsto$ folgt

<u>Satz</u> (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes nichtkonstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

<u>Bew</u>

Sei

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

mit $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Dann ist P unbeschränkt, d.h. für alle $C > 0$ gibt es ein $R > 0$ so daß

$$|P(z)| \geq C$$

für alle $|z| \geq R$. Angenommen P

hat keine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Dann ist $\frac{1}{P}$ eine beschränkte ganze Fkt auf $\mathbb{C}$.

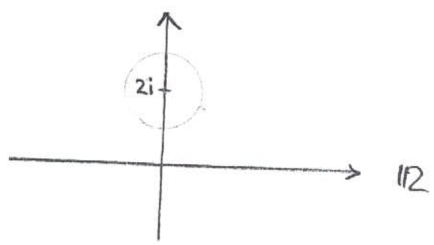
(Sei $c > 0$. Dann ist $\frac{1}{|P(z)|} \le \frac{1}{c}$ für alle z mit $|z| \ge R$. Auf der kompakten Scheibe $\overline{D}_R(0)$ nimmt die stetige Fkt $\frac{1}{|P|}$ ihr Maximum an.)

Also ist $\frac{1}{P}$ konst. $\square$

Mit Hilfe des Cauchyschen Integral-satzes und der Cauchyschen Integralformeln lassen sich Integrale berechnen.

Bsp

1) Sei $\alpha(t) = 2i + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$



Dann ist

$$\oint_\alpha \frac{1}{z^2+4}\,dz = \oint \underbrace{\frac{1}{z+2i}}_{f(z)} \frac{1}{z-2i}\,dz$$

$$= \oint \frac{f(z)}{z-2i}\,dz = 2\pi i\, f(2i) = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

cauchysche Integralformel

2)

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2+2z}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z}\, dz - \frac{1}{2} \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z+2}\, dz$$

weil $\dfrac{1}{z^2+2z} = \dfrac{1}{z(z+2)} = \dfrac{1}{2z} - \dfrac{1}{2(z+2)}$

$$= \frac{1}{2} 2\pi i\, e^0 - \frac{1}{2} 2\pi i\, e^{-2}$$

$$= i\pi \left(1 - e^{-2}\right)$$

3) Wir zeigen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{e}$$

Sei $R > 1$. Def $\gamma(t) = -R + t\,2R$, $0 \le t \le 1$

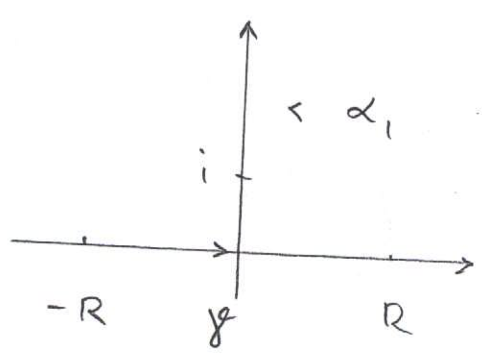
Dann ist

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$$

$$+ \underbrace{i \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx}_{=0}$$

Sei $\alpha_1(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$ und

$\alpha = \gamma \underset{A}{+} \alpha_1$.



Dann ist

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\,\frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\,\frac{1}{z-i}$$

so daß

$$\oint_\alpha \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \frac{i}{2}\underbrace{\oint_\alpha \frac{e^{iz}}{z+i}\,dz}_{=0} - \frac{i}{2}\underbrace{\oint_\alpha \frac{e^{iz}}{z-i}\,dz}_{=2\pi i\, e^{i(i)} = 2\pi i \frac{1}{e}}$$

$$= \frac{\pi}{e}$$

(Das Int über γ ist gleich einem Int über einen Halbkreis)

Andererseits ist

$$\oint_{\alpha} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz + \int_{\alpha_1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz$$

mit

$$\left| \int_{\alpha_1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz \right| \leq \pi R \frac{1}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

weil

$$\left| \frac{e^{iz}}{z^2+1} \right| \leq \frac{1}{R^2-1}$$

für $z \in \operatorname{Im}(\alpha_1)$

(Sei $z \in \operatorname{Im}(\alpha_1)$. Dann ist

$$0 < R^2 - 1 = |z|^2 - 1 = |z^2| - 1 \leq |z^2 - 1|$$

so daß

$$\frac{1}{|z^2 - 1|} \leq \frac{1}{R^2 - 1}$$

und

$$e^{iz} = e^{iRe^{it}} = e^{iR\cos t}\, e^{-R\sin t}$$

so daß

$$|e^{iz}| \leq 1$$

Also

$$\underbrace{\lim_{R \to \infty} \oint_{\alpha} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}\, dz}_{= \frac{\pi}{e}} = \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}\, dz$$