6. Komplexe Differentiation

In diesem Kapitel führen wir den Begriff der komplexen Ableitung ein

6.1 Komplexe Zahlen

Die komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$$

mit

$$i^2 = -1$$

bilden einen Körper. Als

reeller Vektorraum ist

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann heißt x <u>Realteil</u> und y <u>Imaginärteil</u> von z. Man schreibt

$$x = \mathrm{Re}(z) \quad , \quad y = \mathrm{Im}(z)$$

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ def $\bar{z} = x - iy$.

Dann ist

$$\mathrm{Re}(z) = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z})$$
$$\mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

Die Abb

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \bar{z}$$

heißt <u>komplexe Konjugation</u>

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\bar{\bar{z}} = z$$

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$$

Der <u>Betrag</u> von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist def als

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Es gilt

$$|z| \geq 0$$

und

$$z = 0 \iff |z| = 0$$

Für $z \neq 0$ ist

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Weiterhin gilt für $z, w \in \mathbb{C}$

$$|zw| = |z|\,|w|$$

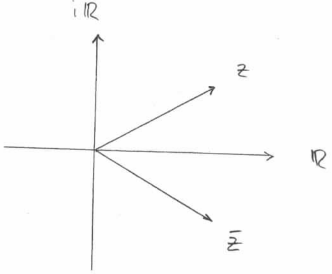
$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$$

$$|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$$

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

$$\big|\,|z|-|w|\,\big| \leq |z-w|$$

Die komplexen Zahlen lassen sich in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulichen



Sei

$$\mathbb{R}_+^* = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$$

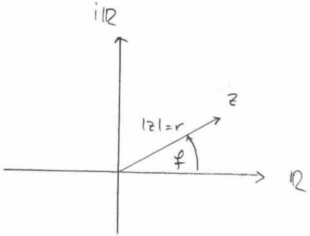
$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Die Abb

$$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$(r, \varphi) \longmapsto r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ist <u>surjektiv</u> aber <u>nicht injektiv</u>



<u>Satz</u>

Ist

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = s(\cos\psi + i\sin\psi)$$

mit $r, s > 0$ so folgt

$$r = s$$
$$\varphi = \psi + 2\pi n \quad , \; n \in \mathbb{Z}$$

In der <u>Polarkoordinatendarst</u>

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$(z \neq 0)$ ist r eindeutig durch z bestimmt $(r = |z|)$, der Winkel φ aber nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π. Wir nennen jeden solchen Winkel ein <u>Argument</u> von z.

Aus den Additionstheoremen folgt

$$zw = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\, s(\cos\psi + i\sin\psi)$$

$$= rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$$

6.2 Topologie in der Gaußschen Zahlenebene

Für $a \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ def man die offene Kreisscheibe

$$D_\varepsilon(a) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \varepsilon \}$$

$D \subseteq \mathbb{C}$ heißt <u>offen</u>, wenn es zu jedem $a \in D$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $D_\varepsilon(a) \subset D$.

$D \subseteq \mathbb{C}$ heißt <u>abgeschlossen</u>, wenn $\mathbb{C} \setminus D$ offen ist.

Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.

Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Def

das <u>Innere</u> von D als

$$\mathring{D} = \bigcup \{A \mid A \subset D \mid A \text{ offen}\}$$

den <u>Abschluß</u> von D als

$$\bar{D} = \cap \{ A \mid D \subset A, \\ A \text{ abgeschlossen} \}$$

und den <u>Rand</u> von D als

$$\partial D = \bar{D} \setminus \mathring{D}$$

$a \in \mathbb{C}$ heißt <u>Häufungspunkt</u> von D wenn in jedem $D_\varepsilon(a)$, $\varepsilon > 0$ wenigstens ein von a verschiedener Pkt aus D liegt.

Eine Folge $(z_n)_{n \geq 0}$ komplexer Zahlen <u>konv gegen z</u>, wenn in jeder Umgebung $D_\varepsilon(z)$ fast alle, d.h. alle bis auf endlich viele, Folgenglieder z_n liegen. Wir schreiben dann

$$z_n \longrightarrow z \quad (n \to \infty)$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = x$$

und

$$\lim \mathrm{Im}(z_n) = y$$

mit $z = x + iy$

Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ heißt <u>kompakt</u>, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung hat.

Das besagt:

Ist $\{U_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

so gibt es eine <u>endliche</u> Teilmenge $J \subset I$ so daß

$$K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$$

Theorem

$D \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann kompakt, wenn D abgeschlossen und beschränkt ist.

6.3 Elementare Funktionen

Sei $(z_k)_{k \geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ heißt konvergent gegen z, wenn die Folge der Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} z_k$

gegen z konv.

Bsp

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$
konv für $|z| < 1$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ heißt absolut
konv, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konv

Satz

Eine absolut konv Reihe konv.

Bsp

Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ konv absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

Für $z \in \mathbb{C}$ def

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

Wie im Reellen zeigt man

Satz

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ absolut konv Reihen. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k} \right)$$

absolut konv und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k} \right) =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \right)$$

Es folgt

$$\exp(z+w) = \exp(z) \exp(w)$$

Weiterhin gilt

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$$

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(\exp(iz) + \exp(-iz)\right)$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(\exp(iz) - \exp(-iz)\right)$$

Wir schreiben auch e^z für $\exp(z)$

Es gelten dieselben Additions-theoreme wie im Reellen.

Sei $z = x + iy$. Dann ist

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

$$= e^x(\cos y + i\sin y)$$

und

$$|e^z| = e^x > 0$$

exp hat also keine Nullstellen.

Wir können die Polar Koordinatendarstellung $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ auch schreiben als $z = re^{i\varphi}$ und

$$zw = re^{i\varphi}\, se^{i\psi}$$
$$= rs\, e^{i(\varphi+\psi)}$$

Satz

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit

$$e^z = e^w$$

Dann ist

$$z - w = 2\pi i n$$

für ein $n \in \mathbb{Z}$.

Bew

Sei $z = x + iy$, $w = u + iv$. Dann impliziert

$$e^z = e^w$$

daß

$$e^x(\cos y + i\sin y) = e^u(\cos v + i\sin v)$$

Es folgt

$$x = u$$

$$y = v + 2\pi n$$

für ein $n \in \mathbb{Z}$, d.h.

$$z - w = 2\pi i n$$

$\square$

Die komplexe Exponentialfkt ist also periodisch und besitzt die Zahlen

$$2\pi i n$$

(und nur diese) als Perioden.

Die Nullstellen von sin und cos auf $\mathbb{C}$ sind die Zahlen $n\pi$ und $(n+\frac{1}{2})\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

(Sei $\cos(z) = 0$. Dann ist

$0 = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, d.h.

$e^{iz} = -e^{-iz}$ bzw. $e^{iz} = e^{i(\pi - z)}$

also $iz - i(\pi - z) = 2\pi n i$, d.h.

$z = (n + \frac{1}{2})\pi$)

Satz

Die Gl

$$z^n = a$$

mit $a \in \mathbb{C}^*$ hat genau n Lsg in $\mathbb{C}$. Schreibe $a = r e^{i\varphi}$. Dann sind diese gegeben durch

$$z_K = \sqrt[n]{r} \; e^{i \frac{\varphi + 2\pi K}{n}}$$

$K = 0, \ldots, n-1$

<u>Bew</u>

Es ist

$$z_K^n = r e^{i(\varphi + 2\pi K)} = r e^{i\varphi} = a$$

Sei jetzt $z = s e^{i\psi}$ eine Lsg von $z^n = a$. Dann ist

$$s^n e^{in\psi} = r e^{i\varphi}$$

so daß

$$s^n = r$$

$$n\psi = \varphi + 2\pi K$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. Also

$$s = \sqrt[n]{r}$$

$$\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$$

d.h.

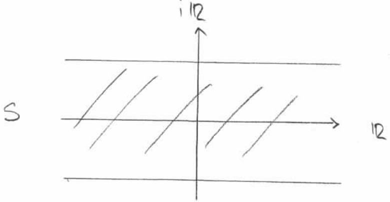
$$z = \sqrt[n]{r} \; e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$$

Wegen der Periodizität der Exponentialfkt kann man annehmen, daß $0 \leq k < n$.

$\square$

Sei

$$S = \{ z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi \}$$



Dann ist die Abb

$$\exp : S \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
$$z \longmapsto \exp(z)$$

<u>injektiv</u> und <u>surjektiv</u>

(Die Injektivität ist klar.
Die Surjektivität ist einfach
zu zeigen.)

Die Umkehrfkt

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \mathrm{Log}(z)$$

wird als <u>Hauptzweig des Logarithmus</u> bez.

Sie ist eindeutig festgelegt durch

1) $\exp(\mathrm{Log}(z)) = z$

2) $-\pi < \mathrm{Im}(\mathrm{Log}(z)) \le \pi$

für alle $z \neq 0$.

(Sei $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = z$ und $-\pi < \mathrm{Im}(f(z)) \le \pi$. Dann ist $\exp(f(z)) = \exp(\mathrm{Log}(z))$, d.h.

$$\underbrace{f(z)}_{\in S} = \underbrace{\mathrm{Log}(z)}_{\in S} + 2\pi i n \qquad \text{also } n = 0$$

und $f(z) = \mathrm{Log}(z)$)

<u>Satz</u>

Aus

$$\exp(w) = z$$

folgt

$$w = \mathrm{Log}(z) + 2\pi i n$$

für ein $n \in \mathbb{Z}$.

Zu $z \neq 0$ gibt es eine eindeutige reelle Zahl mit

1) $-\pi < \varphi \leq \pi$

2) $\frac{z}{|z|} = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$

Man nennt diese den Hauptwert des Arguments und schreibt

$$\varphi = \operatorname{Arg}(z)$$

Es gilt

$$\operatorname{Log}(z) = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z)$$

(Denn

$$e^{\log|z| + i\operatorname{Arg}(z)} = |z|\, e^{i\varphi} = z \quad)$$

Für $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ def man

$$a^b = e^{b \operatorname{Log}(a)}$$

Insbesondere

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \operatorname{Log}(z)}$$

für $z \neq 0$. Ist $z = re^{i\varphi}$ mit $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$, so gilt

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}$$

// 11.1.10

6.4 Stetigkeit

Eine Fkt $f : D \to \mathbb{C}$ heißt <u>stetig in $a \in D$</u>, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

falls $|z-a| < \delta$, $z \in D$

Äquivalent dazu ist:

Für jede Folge (a_n) in D mit $a_n \to a$ gilt $f(a_n) \to f(a)$

f heißt <u>stetig</u>, wenn f in jedem Pkt von D stetig ist.

Die Summe und das Produkt zweier stetiger Fkt sind stetig

Die Fkt

$$\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{1}{z}$$

ist stetig.

Die Zusammensetzung stetiger Fkt ist stetig

Sei $f: D \to \mathbb{C}$ stetig und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann ist $\frac{1}{f}: D \to \mathbb{C}$ stetig.

Eine Fkt $f: D \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig wenn $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ stetige Fkt sind.

Die Fkt exp, cos und sin sind stetig auf $\mathbb{C}$.

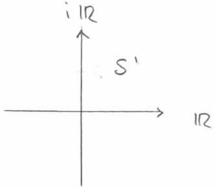
Die Umkehrfkt einer stetigen Fkt ist <u>nicht</u> notwendig stetig

<u>Bsp</u>

Die Fkt

$$(-\pi, \pi] \longrightarrow S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

$$f \longmapsto e^{if}$$



ist stetig

Die Umkehrfkt

$$S^1 \longrightarrow (-\pi, \pi]$$

$$z \longmapsto \operatorname{Arg}(z)$$

ist hingegen <u>nicht</u> stetig in -1:

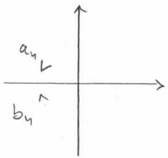
Sei $a_n = e^{i(\pi - \frac{1}{n})}$, $b_n = e^{i(-\pi + \frac{1}{n})}$

Dann gilt $a_n \to e^{i\pi} = -1$,

$b_n \to e^{-i\pi} = -1$ aber

$$\mathrm{Arg}(a_n) = \pi - \frac{1}{n} \longrightarrow \pi$$

$$\mathrm{Arg}(b_n) = -\pi + \frac{1}{n} \longrightarrow -\pi$$



Folgerung:

Der Hauptzweig des Log ist <u>unstetig</u> auf der neg. reellen Achse

Dasselbe gilt für $\sqrt{z}$.

6.5 Komplexe Ableitung

Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$.

Die Aussage

$$f(z) \to c \quad \text{für } z \to a$$

bedeutet per def

1) a ist Häufungspkt von D
2) Die Fkt

$$\hat{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \begin{cases} f(z) & \text{für } z \neq a \\ c & \text{für } z = a \end{cases}$$

ist stetig in a

Der Grenzwert c ist eindeutig bestimmt und man schreibt

$$c = \lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} f(z)$$

oder

$$c = \lim_{z \to a} f(z)$$

Sei $D \subset \mathbb{C}$. Eine Fkt

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

heißt <u>komplex differenzierbar</u>
<u>in $a \in D$</u>, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existiert.

Im Falle der Existenz bezeichnet man diesen Wert als $f'(a)$.

f ist genau dann in a differenzierbar mit Ableitung $f'(a) = c$ wenn es eine in a stetige Fkt $\varphi : D \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z) = f(a) + \varphi(z)(z-a)$$

und

$$\varphi(a) = c$$

Eine in a komplex diff b Fkt ist also stetig in a.

Wie im Reellen zeigt man

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

$$(fg)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g^2(a)}$$

falls $g(a) \neq 0$.

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))\, g'(a)$$

<u>Bsp</u>

1) $f(z) = z$

$f'(z) = 1$

2) $f(z) = z^n$

$$f'(z) = n z^{n-1}$$

(Bew durch Ind und Produktregel.)

3) $$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$$

4) Sei $a \in \mathbb{C}$ und (c_n) eine Folge komplexer Zahlen. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

heißt <u>Potenzreihe um a</u> mit Koeffizienten c_n. Wir nehmen an, daß die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

in $D_R(a) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R \}$ $(R > 0)$ konvergiert und def

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Dann ist die Fkt f für alle $z \in D_R(a)$ komplex diffb

und

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$$

5) exp ist komplex differenzierbar für alle $z \in \mathbb{C}$ und

$$\exp'(z) = \exp(z)$$

(Bew mit 4))

6) Der Hauptwert des Log ist komplex differenzierbar auf $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$ und

$$\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z}$$

Sei $D \subset \mathbb{C}$, $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in a.

Dann gilt

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + r(z)$$

mit

$$\lim_{z \to a} \frac{r(z)}{z-a} = 0$$

Dies ist formal ähnlich zum Begriff der totalen Differenzierbarkeit der reellen Analysis.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ <u>offen</u> und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

f heißt <u>total differenzierbar</u> in $a \in D$, wenn es eine $\mathbb{R}$-lin Abb $(Df)(a)$ gibt, so daß

$$f(x) = f(a) + (Df)(a)(x-a) + r(x)$$

mit

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{|x-a|} = 0$$

Identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ durch $z = x + iy \longmapsto \binom{x}{y}$ so folgt

Sei $D \subset \mathbb{C}$ <u>offen</u>,

$$f : D \to \mathbb{C}$$

und $a \in D$. Dann ist f in a <u>komplex differenzierbar</u> mit Ableitung $c = f'(a)$ genau dann wenn f in a <u>total differenzierbar</u> im Sinne der reellen Analysis ist und

$$(Df)(a)\, z = cz$$

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen,

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

und $a \in D$. Schreibe

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) \\ &= u(x,y) + i v(x,y) \end{aligned}$$

Ist f in a total differenzierbar, so existieren die part Abl von u und v in a und

$$(Df)(a) = \begin{pmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{pmatrix}$$

<u>Satz</u> (Cauchy, Riemann)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in D$ und

$$f : D \to \mathbb{C}$$

Dann sind äquivalent

1) f ist in a komplex differenzier-bar

2) f ist in a total differenzier-bar und es gelten die Cauchy-Riemannschen DGL

$$u_x(a) = v_y(a)$$
$$u_y(a) = -v_x(a)$$

Es gilt dann

$$f'(a) = u_x(a) + i v_x(a)$$

Bew

Eine $\mathbb{R}$-lin Abb $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2)$ beschreibt genau dann die komplexe Mult mit $c = \alpha + i\beta$, wenn A der Form

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

ist.

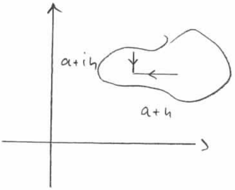
$\square$

Die Cauchy-Riemannschen DGL lassen sich auch einfach folgendermaßen herleiten

Ist f in a komplex differenzierbar, so gilt

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(a+ih) - f(a)}{ih}$$



Es ist

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \left\{ \frac{u(x+h, y) + i v(x+h, y)}{h} \right.$$

$$\left. - \frac{u(x, y) + i v(x, y)}{h} \right\}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}$$

$$+ i \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h}$$

$$= u_x(a) + i v_x(a)$$

Analog

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(a+ih) - f(a)}{ih} = v_y(a) - i\, u_y(a)$$

Es folgt

$$u_x(a) = v_y(a)$$
$$v_x(a) = -u_y(a)$$

Die Existenz der partiellen Abl von f ist nicht hinreichend dafür, daß f total differenzierbar ist. Es gilt aber:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: D \to \mathbb{C}$

Existieren die part Abl von f in jedem Pkt und sind stetig, so ist f total differenzierbar auf D.

Bsp

1) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto z^2$

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2$$
$$= \underbrace{(x^2 - y^2)}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{(2xy)}_{v(x,y)}$$

Die part Abl von f ex und sind stetig. Also ist f total differenzierbar.

Es ist

$$u_x(x,y) = 2x \qquad u_y(x,y) = -2y$$
$$v_x(x,y) = 2y \qquad v_y(x,y) = 2x$$

Die Cauchy-Riemannschen DGL sind also erfüllt. Die Fkt ist folglich komplex differenzierbar auf $\mathbb{C}$.

2) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto \bar{z}$

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

$$u(x,y) = x \qquad v(x,y) = -y$$

$$u_x(x,y) = 1 \qquad u_y(x,y) = 0$$

$$v_x(x,y) = 0 \qquad v_y(x,y) = -1$$

Also $u_x(x,y) \neq v_y(x,y)$ für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Die Fkt f ist somit in keinem Pkt von $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar. //

12.1.10

3) Die Fkt exp, sin und cos sind auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Es gilt z. B.

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

d.h.

$$u(x,y) = e^x \cos y$$
$$v(x,y) = e^x \sin y$$

Diese Fkt sind stetig partiell diffb mit

$$u_x(x,y) = e^x \cos y$$
$$u_y(x,y) = -e^x \sin y$$
$$v_x(x,y) = e^x \sin y$$
$$v_y(x,y) = e^x \cos y$$

Es gelten also die Cauchy-Riemann DGL. Somit ist exp komplex diffb in z und

$$\exp'(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$
$$= \exp(z)$$

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Zwei offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{C}$ liefern eine Zerlegung von D wenn

1) $U \cap D$, $V \cap D$ sind nicht leer und disjunkt

2) $D = (U \cap D) \cup (V \cap D)$

D heißt zusammenhängend, wenn D keine Zerlegung hat.

Satz

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$. Dann ist f konstant

Bew

Aus $f'(z) = 0$ folgt

$$u_x(z) = v_x(z) = 0$$

und mit den Cauchy-Riemann DGL

$$v_y(z) = u_y(z) = 0$$

Somit sind u und v konstant, d.h. f ist konstant.

$\square$

Analog zeigt man

<u>Satz</u>

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und zshgd und $f: D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Nimmt f nur reelle (oder nur rein imag.) Werte an, so ist f konstant.

<u>Bew</u>

Es ist

$$f(z) = u(x,y) + i \underbrace{v(x,y)}_{=0}$$

Aus den Cauchy-Riemann DGL folgt

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) = 0$$
$$u_y(x,y) = -v_x(x,y) = 0$$

d.h. u ist konstant. Somit ist auch f konstant.

$\square$

<u>Satz</u>

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und $f = u + iv$.
u und v seien zweimal stetig part differenzierbar. Dann gilt

$$\Delta u = \Delta v = 0$$

d.h. u und v sind harmonische Fkt (Potentialfkt).

Bew

Da f komplex differenzierbar ist, gelten die Cauchy-Riemannschen DGL auf D

$$u_x = v_y$$
$$u_y = -v_x$$

Da u und v zweimal stetig part diffb sind, ist nach dem Satz von Schwarz

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$$

und

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

d.h.

$$\Delta u = 0$$

Analog $\Delta v = 0$

Wir werden sehen, daß eine auf einer offenen Menge komplex diff'b Fkt unendlich oft komplex diff'b ist, so daß die Forderung, daß u und v zweimal stetig part diff'b sind, nicht notwendig ist.