5. Randwertaufgaben

Gegeben sei die DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Gesucht ist eine Lsg y auf $[a,b]$. Wenn die n Bed, die die Lsg eindeutig charakterisieren sollen, nicht an einer einzigen Stelle gefordert werden wie beim Anfangswertproblem sondern an den beiden Randpunkten a und b, so spricht man von einem <u>Randwertproblem</u>.

5.1 Lineare Randwertprobleme 2. Ordnung

Wir betrachten im folgenden die DGL

$$\Lambda y = y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x) \qquad (*)$$

für $x \in [a,b]$ mit stetigen reellwertigen Fkt a_0, a_1, f auf $[a,b]$ und Randbedingungen

$$R_1 y = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \varsigma_1$$
$$R_2 y = \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \varsigma_2$$

Ist $S_1 = S_2 = 0$ so heißen die Randbed <u>homogen</u>.

Die Operatoren R_k sind <u>linear</u>.

Ein Randwertproblem ist nicht immer lösbar und wenn eine Lsg existiert, braucht diese nicht eindeutig zu sein.

<u>Satz</u>

Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der zu (*) gehörigen homog GL

$$\Lambda y = 0$$

Die Randwertaufgabe

$$\Lambda y = f$$

$$R_1 y = s_1 , \quad R_2 y = s_2$$

ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\begin{vmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

<u>Bew</u>

Sei y_p eine part Lsg der DGL $\Lambda y = f$. Dann läßt sich die allg Lsg dieser DGL schreiben als

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Die Randwertaufgabe ist also genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$R_1 y = R_1 y_p + c_1 R_1 y_1 + c_2 R_1 y_2 = s_1$$

$$R_2 y = R_2 y_p + c_1 R_2 y_1 + c_2 R_2 y_2 = s_2$$

bzw.

$$c_1 R_1 y_1 + c_2 R_1 y_2 = s_1 - R_1 y_p$$

$$c_1 R_2 y_1 + c_2 R_2 y_2 = s_2 - R_2 y_p$$

eindeutig lösbar ist. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\begin{vmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\square$

Es folgt

<u>Satz</u>

Das Randwertproblem

$$\Lambda y = f$$
$$R_1 y = s_1 , \quad R_2 y = s_2$$

hat genau dann eine <u>eindeutige</u> Lsg, wenn das Randwertproblem

$$\Lambda y = 0$$
$$R_1 y = R_2 y = 0$$

nur die triviale Lsg besitzt.

Die Randwertaufgabe

$$\Lambda y = f$$
$$R_1 y = s_1 , \quad R_2 y = s_2$$

läßt sich auf ein Randwert-problem mit homog Randbed zurückführen

Sei $y^*: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig diffb Fkt mit

$$R_1 y^* = \beta_1 \quad , \quad R_2 y^* = \beta_2$$

(Eine solche Fkt existiert, falls die Vektoren (α_1, α_2), (β_1, β_2) ungleich $(0,0)$ sind.)

Dann gilt:

y löst

$$\Lambda y = f$$
$$R_1 y = S_1, \quad R_2 y = S_2$$

genau dann wenn $u = y - y^*$ die Gl

$$\Lambda u = \Lambda y - \Lambda y^* = f - \Lambda y^*$$
$$R_1 u = R_1 y - R_1 y^* = S_1 - S_1 = 0$$
$$R_2 u = R_2 y - R_2 y^* = S_2 - S_2 = 0$$

löst

5.2 Sturmsche Randwertaufgaben und die Greensche FKt

Die DGL

$$y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x) \qquad (1)$$

mit <u>stetigem</u> $a_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ läßt sich immer auf die Form

$$(p(x)\,y')' + q(x)\,y = f(x) \qquad (2)$$

mit stetig diffb $p > 0$ bringen.

(Def

$$p(x) = e^{\int a_1(x)\,dx}$$

Dann ist $p' = a_1 p$ und (1) liefert

$$p y'' + p a_1 y' + p a_0 y = p g$$

und

$$(p y')' - p' y' + p a_1 y' + p a_0 y = p g$$

bzw.

$$(py')' + \underbrace{(pa_1 - p')}_{=0} y' + pa_0 y = pg \quad)$$

Andererseits folgt aus (2)

$$py'' + p'y' + qy = f$$

bzw.

$$y'' + \frac{p'}{p} y' + \frac{q}{p} y = \frac{f}{p}$$

Als <u>Sturmsche Randwertaufgabe</u>

bezeichnen wir die Aufgabe

$$Ly = (p(x)y')' + q(x)y = g(x)$$

auf $J = [a,b]$ mit Rand bed

$$R_1 y = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$
$$R_2 y = \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

und

$$\left.\begin{array}{l} p : J \to \mathbb{R} \text{ stetig diff'b} \\ p(x) > 0 \text{ auf } J \\ q, g : J \to \mathbb{R} \text{ stetig} \\ \text{die Vektoren } (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \\ \text{sind } \neq 0 \text{:} \end{array}\right\} \quad (S)$$

<u>Satz</u> (Identität von Lagrange)

Seien $u, v \in C^2(J)$. Dann ist

$$uLv - vLu = (p(uv' - vu'))'$$

Bew

Durch Nachrechnen $\square$

Wir konstruieren nun eine Lsg der Sturmschen Randwertaufgabe

Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der der DGL

$$Ly = 0$$

Das homog Sturmsche Randwertproblem

$$Ly = 0$$

$$R_1 y = R_2 y = 0$$

habe nur die triv Lsg d.h.

$$\begin{vmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Dann bilden die Fkt

$$v_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2$$
$$v_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2$$

mit

$$c_{11} = R_1 y_2 \qquad c_{12} = -R_1 y_1$$
$$c_{21} = R_2 y_2 \qquad c_{22} = -R_2 y_1$$

ein neues Fundamentalsystem

von $Ly = 0$ und

$$R_1 v_1 = c_{11} R_1 y_1 + c_{12} R_1 y_2$$

$$= R_1 y_2 \, R_1 y_1 - R_1 y_1 \, R_1 y_2$$

$$= 0$$

$$R_2 v_2 = 0$$

Sei

$$w(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} = v_1 v_2' - v_1' v_2$$

Dann ist $w(x) \neq 0$ für alle $x \in J$

und wegen der Identität von

Lagrange

$$p(x)\, w(x) = \text{const}$$

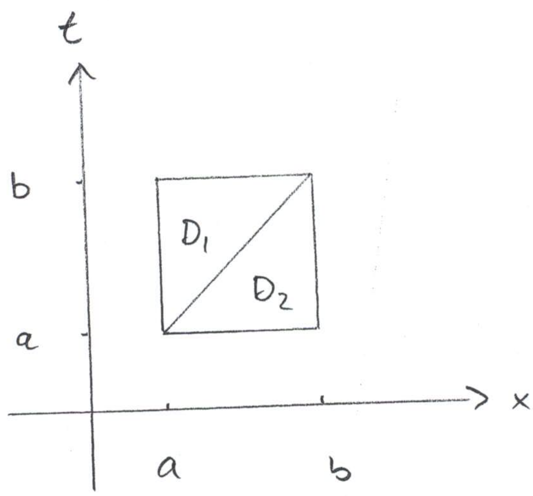
$$= \underbrace{p(a)}_{>0} \; \underbrace{w(a)}_{\neq 0} \neq 0$$

Def

$$Q = \{(x,t) \mid a \le x, t \le b\}$$

$$D_1 = \{(x,t) \mid a \le x \le t \le b\}$$

$$D_2 = \{(x,t) \mid a \le t \le x \le b\}$$



und

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{v_1(x)\,v_2(t)}{p(a)\,w(a)} & \text{für } (x,t) \in D_1 \\[2ex] \dfrac{v_1(t)\,v_2(x)}{p(a)\,w(a)} & \text{für } (x,t) \in D_2 \end{cases}$$

Die Fkt $G(x,t)$ heißt Greensche Fkt. Sie hat folgende Eigenschaften

1) G ist stetig auf Q

2) Die partiellen Ableitungen G_x und G_{xx} existieren auf D_1 und D_2 und sind dort stetig

3) Für festes $t \in J$ ist $G(x,t)$ betrachtet als Fkt von x eine Lsg von $Ly = 0$ für $x \neq t$, $x \in J$

4) Es gilt die Sprungrelation

$$G_x(x+0, x) - G_x(x-0, x) = \frac{1}{p(x)}$$

für $a < x < b$.

(Es ist

$$G_x(x+0,x) = \frac{v_1(x)\,v_2'(x)}{p(a)\,w(a)} \quad \text{für} \quad a \le x < b$$

$$((x,t) \in D_2)$$

$$G_x(x-0,x) = \frac{v_1'(x)\,v_2(x)}{p(a)\,w(a)} \quad \text{für} \quad a < x \le b$$

$$((x,t) \in D_1)$$

so daß

$$G_x(x+0,x) - G_x(x-0,x)$$

$$= \frac{1}{p(a)\,w(a)} \left(v_1(x)\,v_2'(x) - v_1'(x)\,v_2(x) \right)$$

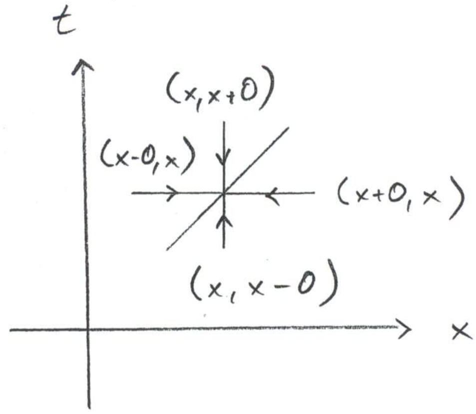
$$= \frac{1}{p(a)\,w(a)}\, w(x) = \frac{1}{p(x)}$$

)

Wegen der Stetigkeit von G_x ist

$$G_x(x+0,x) = G_x(x,x-0)$$

$$G_x(x,x+0) = G_x(x-0,x)$$



// 14.12.09

<u>Theorem</u>

Gegeben sei das Sturmsche Randwertproblem

$$Ly = f$$

$$R_1 y = R_2 y = 0$$

mit den Standardvoraus. (S).

Das zugehörige homogene Problem

$$Ly = 0$$

$$R_1 y = R_2 y = 0$$

habe nur die triviale Lsg.

Sei v_1, v_2 ein Fundamentalsystem von $Ly = 0$ mit $R_1 v_1 = R_2 v_2 = 0$ und

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{v_1(x) v_2(t)}{p(a) w(a)} & \text{für } a \le x \le t \le b \\ \dfrac{v_1(t) v_2(x)}{p(a) w(a)} & \text{für } a \le t \le x \le b \end{cases}$$

die zugehörige Greensche Fkt.

Dann ist die eindeutige Lsg der Sturmschen Randwertaufgabe gegeben durch

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)\, f(t)\, dt$$

$(x \in [a,b])$.

<u>Bew</u>

Die Fkt $G(x,t)$ ist nicht differenzierbar entlang der Geraden $x=t$. Es gilt aber

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)\, f(t)\, dt$$

$$= \int_a^x G(x,t)\, f(t)\, dt + \int_x^b G(x,t)\, f(t)\, dt$$

$(t \le x \leadsto (x,t) \in D_2)$ $(x \le t \leadsto (x,t) \in D_1)$

so daß

$$y'(x) = G(x,x)\,f(x) + \int_a^x G_x(x,t)\,f(t)\,dt$$

$$- G(x,x)\,f(x) + \int_x^b G_x(x,t)\,f(t)\,dt$$

$$= \int_a^x G_x(x,t)\,f(t)\,dt + \int_x^b G_x(x,t)\,f(t)\,dt$$

$$= \int_a^b G_x(x,t)\,f(t)\,dt$$

Für die zweite Abl finden wir

$$\frac{d}{dx}\left(y'(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x G_x(x,t)\,f(t)\,dt + \int_x^b G_x(x,t)\,f(t)\,dt\right)$$

$$= G_x(x, x-0)\, f(x) + \int_a^x G_{xx}(x,t)\, f(t)\, dt$$

$$- G_x(x, x+0)\, f(x) + \int_x^b G_{xx}(x,t)\, f(t)\, dt$$

$$= \frac{f(x)}{p(x)} + \int_a^b G_{xx}(x,t)\, f(t)\, dt$$

für $a < x < b$. Wegen der Stetigkeit von $G_x(x,t)$ gilt dies auch für $x = a$ und $x = b$.

(Wir zeigen dies für $x = a$.

Wegen der Stetigkeit von G_x auf D_2 ist

$$G_x(x, x-0) - G_x(x+0, x)$$

so daß

$$y''(x) = G_x(x+0,x)f(x) + \int_a^x G_{xx}(x,t)f(t)\,dt$$

$$G_x(x,x+0)f(x) + \int_x^b G_{xx}(x,t)f(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\left(G_x(x+0,x) + G_x(x,x+0)\right)}_{\frac{1}{p(x)}} f(x)$$

$$+ \int_a^b \cdots$$

In diesem Ausdruck können wir den Grenzübergang $x \to a$ durchführen. Es folgt

$$y''(a) = \frac{f(a)}{p(a)} + \int_a^b G_{xx}(a,t)f(t)\,dt \qquad)$$

Es ist

$$Ly = py'' + p'y' + qy$$

$$= f(x) + \int_a^b \underbrace{\{ p(x)\,G_{xx}(x,t) + p'(x)\,G_x(x,t) + q(x)\,G(x,t) \}}_{= LG(x,t) = 0 \text{ für } x \neq t} f(t)\,dt$$

$$= f(x)$$

Schließlich

$$R_1 y = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a)$$

$$= \alpha_1 \int_a^b G(a,t)\,f(t)\,dt + \alpha_2 \int_a^b G_x(a,t)\,f(t)\,dt$$

$$= \int_a^b (\alpha_1 G(a,t) + \alpha_2 G_x(a,t))\, f(t)\, dt$$

$$(\quad x \leq t \quad \sim \quad (x,t) \in D_1 \quad)$$

$$= \frac{1}{p(a)w(a)} \int_a^b (\alpha_1 v_1(a) v_2(t) - \alpha_2 v_1'(a) v_2(t))\, f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{p(a)w(a)} \underbrace{(\alpha_1 v_1(a) - \alpha_2 v_1'(a))}_{= R_1 v_1 = 0} \int_a^b v_2(t) f(t)\, dt$$

$$= 0$$

Analog

$$R_2 y = 0 .$$

$\square$

Bsp

1) Wir betrachten das Randwert-problem

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

mit $\underline{\lambda > 0}$ auf $[0,1]$. Dies ist ein Sturmsches Randwertproblem mit $p = 1$, $q = \lambda$ und $R_1 y = y(0)$, $R_2(y) = y(1)$. Die allgem Lsg von $y'' + \lambda y = 0$ ist gegeben durch

$$y(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\, x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\, x$$

Aus den Randbed folgt

$$y(0) = c_2 = 0$$

$$y(1) = c_1 \sin\sqrt{\lambda} + c_2 \cos\sqrt{\lambda} = 0$$

also

$$c_2 = 0$$

$$c_1 \sin\sqrt{\lambda} = 0$$

Ist $\sin\sqrt{\lambda} \neq 0$, d.h. $\lambda \neq n^2\pi^2$,

so hat das Randwertproblem

nur die triv Lsg $y(x) = 0$.

Ist hingegen $\sin\sqrt{\lambda} = 0$, d.h.

$\lambda = n^2\pi^2$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$,

so hat das Randwertproblem

die nichttriv Lsg $y(x) = c \sin n\pi x$.

2) Gegeben sei das Randwert-problem

$$y'' + \lambda y = f(x)$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

mit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$\lambda > 0$.

Ein Fundamentalsystem von $y'' + \lambda y = 0$ ist gegeben durch

$$y_1(x) = \sin \sqrt{\lambda}\, x$$
$$y_2(x) = \cos \sqrt{\lambda}\, x$$

Das homog Randwertproblem

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

ist genau dann eindeutig lösbar

wenn

$$\begin{vmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin\sqrt{\lambda} & \cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= -\sin\sqrt{\lambda}$$

$$\neq 0$$

d.h. wenn

$$\lambda \neq n^2\pi^2$$

Sei $\underline{\lambda \neq n^2\pi^2}$ Dann bilden

$$v_1 = \underbrace{(R_1 y_2)}_{=1} y_1 - \underbrace{(R_1 y_1)}_{=0} y_2 = y_1 = \sin\sqrt{\lambda}\, x$$

$$v_2 = \underbrace{(R_2 y_2)}_{\cos\sqrt{\lambda}} y_1 - \underbrace{(R_2 y_1)}_{\sin\sqrt{\lambda}} y_2$$

$$= \cos\sqrt{\lambda}\, \sin\sqrt{\lambda}\, x - \sin\sqrt{\lambda}\, \cos\sqrt{\lambda}\, x$$

$$= \sin\sqrt{\lambda}\, (x-1)$$

ein Fundamentalsystem von

$y'' + \lambda y = 0$ mit $v_1(0) = v_2(1) = 0$

Es ist

$$w(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\sqrt{\lambda}\,x & \sin\sqrt{\lambda}\,(x-1) \\ \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,x & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,(x-1) \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{\lambda}\,\Big(\sin\sqrt{\lambda}\,x \,\cos\sqrt{\lambda}\,(x-1)$$

$$- \cos\sqrt{\lambda}\,x\,\sin\sqrt{\lambda}\,(x-1) \Big)$$

$$= \sqrt{\lambda}\,\sin\sqrt{\lambda}$$

$$= w(0)$$

Die Greensche Fkt lautet somit

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}} \begin{cases} \sin\sqrt{\lambda}\,x\,\sin\sqrt{\lambda}\,(t-1) & x \le t \\ \sin\sqrt{\lambda}\,t\,\sin\sqrt{\lambda}\,(x-1) & t \le x \end{cases}$$

$$(\lambda > 0,\ \lambda \neq n^2\pi^2)$$

Die eindeutige Lsg des Randwert problems ist gegeben durch

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t)\, f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}\,\sin\sqrt{\lambda}} \int_0^x G(x,t)\, f(t)\, dt$$

$(t \leq x)$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}\,\sin\sqrt{\lambda}} \int_x^1 G(x,t)\, f(t)\, dt$$

$(x \leq t)$

$$= \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(x-1)}{\sqrt{\lambda}\,\sin\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin\sqrt{\lambda}\, t\; f(t)\, dt$$

$$+ \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda}\,\sin\sqrt{\lambda}} \int_x^1 \sin\sqrt{\lambda}\,(t-1)\; f(t)\, dt$$

// 15.12.09