erhält man die eben behandelte DGL.

## 4.3 Systeme von Differentialgleichungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und

$$f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y_1, \ldots, y_n) \longmapsto f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$$

$i = 1, \ldots, n$. Dann wird

$$y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

als <u>System von Differentialgl</u>

<u>1. Ordnung</u> bez. Wir schreiben ein solches System mit Hilfe von Vektoren

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} , \quad \vec{f}(x,\vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x,\vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(x,\vec{y}) \end{pmatrix}$$

als

$$\vec{y}\,' = f(x,\vec{y})$$

Bei einem Anfangswertproblem gibt man zusätzlich zur DGL $n$ Anfangswerte

$$y_i(\xi) = \eta_i$$

$i = 1, \ldots, n$ mit $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \in D$ oder in Vektorschreibweise

$$\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$$

mit $(\xi, \vec{\eta}) \in D$ vor.

Solche Systeme von Differentialgl 1. Ordnung sind sowohl für die Theorie der Differentialgl als auch für Anwendungen sehr wichtig

Bsp

1) Gegeben sei die DGL $n$-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

Def man

$$y_1(x) = y(x)$$
$$y_2(x) = y'(x)$$
$$y_3(x) = y''(x)$$
$$\vdots$$
$$y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$$

so läßt sich (1) in folgendes System umschreiben

$$y_1'(x) = y_2(x)$$
$$y_2'(x) = y_3(x) \qquad (2)$$
$$\vdots$$
$$y_n'(x) = f(x, y_1, \dots, y_n)$$

Es gilt

$y(x)$ ist genau dann eine Lsg von (1)

wenn

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

eine Lsg von (2) ist.

Eine explizite DGL n-ter Ordnung ist also äquivalent zu einem n-dim System von DGL 1. Ordnung

// 30.11.09

2) Die DGL

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

liefert mit

$$y_1 = y$$
$$y_2 = y'$$

das System

$$y_1' = y_2$$
$$y_2'' = y'' = 3y' - 2y$$
$$= -2y_1 + 3y_2$$

bzw

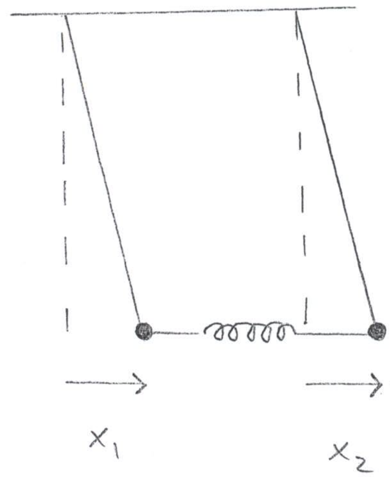
$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Gekoppelte Schwingungen

Die gekoppelten Pendel




werden für kleine Auslenkungen durch die Gl

$$m\ddot{x}_1 + d x_1 + K(x_1 - x_2) = 0$$
$$m\ddot{x}_2 + d x_2 + K(x_2 - x_1) = 0$$

mit $m, d, K > 0$ beschrieben.

Setzt man

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = \dot{x}_1$$
$$y_3 = x_2$$
$$y_4 = \dot{x}_2$$

so erhält man das 4-dim System

$$\dot{y}_1 = y_2$$
$$\dot{y}_2 = -\frac{d}{m} y_1 - \frac{k}{m}(y_1 - y_3)$$
$$\dot{y}_3 = y_4$$
$$\dot{y}_4 = -\frac{d}{m} y_3 - \frac{k}{m}(y_3 - y_1)$$

Für n-dim Systeme von DGL 1. Ord gelten Existenz- und Eindeutigkeitssätze, die völlig analog zum 1-dim Fall sind (vgl. 3.7).

(Zur Erinnerung: Der Vektor

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

hat die Norm

$$|y| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$ )

<u>Existenzsatz</u> (Peano)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet,

$$\vec{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x, \vec{y}) \longmapsto \vec{f}(x, \vec{y})$$

<u>stetig</u> und $(\xi, \vec{\eta}) \in D$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}) \quad , \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$$

<u>mindestens</u> eine Lsg. Jede Lsg läßt sich nach rechts und links bis zum Rand von D fortsetzen.

Die Fkt $\vec{f}$ genügt in $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ einer <u>Lipschitzbed</u> bzgl $\vec{y}$, wenn

$$|\vec{f}(x,\vec{y}_1) - \vec{f}(x,\vec{y}_2)| \leq L\,|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|$$

für alle $(x,\vec{y}_1), (x,\vec{y}_2) \in D$.

Existiert zu jedem Pkt $(x,\vec{y}) \in D$ eine offene Umgebung $U$ so daß $\vec{f}$ auf $D \cap U$ einer Lipschitzbed bzgl $\vec{y}$ genügt, so sagt man, daß $\vec{f}$ in $D$ eine <u>lokale Lipschitzbed</u> bzgl $\vec{y}$ erfüllt. (Die Lipschitzkonstante darf in verschiedenen Umgebungen verschieden sein.)

Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen und

$$\vec{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x, \vec{y}) \longmapsto \vec{f}(x, \vec{y})$$

stetig. Sind die Fkt $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, \dots, n$ stetig, so erfüllt $\vec{f}$ in $D$ eine lokale Lipschitzbed bzgl $y$.

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet und $\vec{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. $\vec{f}$ genüge einer lokalen Lipschitzbed bzgl $\vec{y}$.

Sei $(\xi, \vec{\eta}) \in D$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}) \quad , \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$$

genau eine Lsg. Sie läßt sich nach links und rechts bis zum Rand von D fortsetzen.

Satz (globale Existenz)
Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $\vec{f}(x, \vec{y})$ auf $J \times \mathbb{R}^n$ stetig. Weiterhin genüge $\vec{f}$ einer Lipschitzbed bzgl y auf $J \times \mathbb{R}^n$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,' = f(x,\vec{y}\,) \ , \ \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$$

genau eine Lsg. Sie existiert auf ganz J.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man leicht den globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lin. DGL n-ter Ordnung in 4.1 beweisen.

Wir betrachten nun n-dim Systeme der Form

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine $n \times n$-Matrix mit konst reellen Koeff ist und

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

mit stetigen Fkt $b_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Die Gl

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}$$

wird als das zugehörige homog System bez.

Die allgem Lsg des inhomog Systems erhält man, indem man zu einer beliebigen Lsg des inhomog Systems die allgem Lsg des homog Systems addiert.

Bsp

Die lin DGL n-ter Ordnung mit Konst Koeff

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}$, $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist äquivalent zu dem System

$(y = y_1, y' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_n)$

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

$$\vdots$$

$$y_n' = -a_0 y - a_1 y' - \dots - a_{n-1} y^{(n-1)} + b$$

$$= -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \dots - a_{n-1} y_n + b$$

d.h.

$$\vec{y}\,' = A \vec{y} + \vec{b}$$

mit

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Satz

Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Dann bilden die Lsg des homog Systems

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}$$

einen n-dim Vektorraum.

Eine Basis des Lösungsraums bezeichnen wir als Fundamentalsystem.

Satz

Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\vec{b} : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b} \quad , \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$$

wobei $\xi \in I$ und $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lsg. Sie existiert auf ganz $I$.

<u>Bew</u>

Wir zeigen, daß die Abb

$$\vec{f}(x, \vec{y}) = A\vec{y} + \vec{b}$$

auf $I \times \mathbb{R}^n$ einer globalen Lipschitz-bed genügt. Der Satz folgt dann aus dem obigen globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Systeme.

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ und $c = \max |a_{ij}|$

Dann ist

$$|A\vec{y}|^2 = \sum_{i=1}^{n} (A\vec{y})_i^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right)^2$$

Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungl ist

$$\left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right)^2 \leq \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \left( \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \right)$$
$$\leq n c^2 |\vec{y}|^2$$

Es folgt

$$|A\vec{y}|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} n c^2 |\vec{y}|^2 = n^2 c^2 |\vec{y}|^2$$

Also

$$|A\vec{y}| \le nc|\vec{y}|$$

Das impliziert die Beh. $\square$

Seien $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ Lsg des homog Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$. Wir def

$$W(x) = (\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x))$$

<u>Satz</u>

Es ist entweder $(\det W)(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder $(\det W)(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Flkt $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ bilden genau dann ein Fundamentalsystem,

wenn $(\det W)(x) \neq 0$ für ein $x \in \mathbb{R}$.

<u>Satz</u>

Sei $A$ eine reelle $n \times n$-Matrix.

Ist $A$ <u>diagonalisierbar</u> mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und zugehörigen lin unabhängigen Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, so bilden die Vektoren

$$\vec{y}_i = e^{\lambda_i x} \vec{v}_i$$

ein Fundamentalsystem des homog Systems

$$\vec{y}\,' = A \vec{y}.$$

Bew

Es ist

$$\vec{y}_i\,' = \lambda_i e^{\lambda_i x} \vec{v}_i$$

$$= e^{\lambda_i x} \lambda_i \vec{v}_i$$

$$= e^{\lambda_i x} A \vec{v}_i$$

$$\uparrow$$

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$$

$$= A e^{\lambda_i x} \vec{v}_i$$

$$= A \vec{y}_i$$

Somit sind die Fkt $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ Lsg des homog Systems.

Weiterhin ist

$$W(0) = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$$

Die Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sind nach Voraussetzung lin unabh. Also

$$(\det W)(0) \neq 0,$$

d.h. die Fkt $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ sind lin unabh und bilden somit ein Fundamentalsystem.

$\square$

I.a. sind die Eigenwerte und Eigenvektoren einer reellen Matrix komplex.

Ist $\vec{y}$ eine komplexe Lsg von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, so auch $\overline{\vec{y}}$ (da

$\overline{(\vec{y}\,')} = (\overline{\vec{y}})'$ ) Somit sind mit

$\vec{y}$ auch $\mathrm{Re}(\vec{y}) = \frac{1}{2}(\vec{y} + \overline{\vec{y}})$ und

$\mathrm{Im}(\vec{y}) = \frac{1}{2i}(\vec{y} - \overline{\vec{y}})$ Lsg von

$\vec{y}\,' = A\vec{y}$. Aus einem komplexen

Eigenwert $\lambda$ mit Eigenvektor $\vec{v}$

erhält man also 2 reelle Lsg.

Man beachte, daß mit $\lambda$ und $\vec{v}$

auch $\bar{\lambda}$ und $\overline{\vec{v}}$ einen Eigenwert

mit Eigenvektor darstellen. Diese

liefern beim Aufspalten in Real-

und Imaginärteil dieselben

reellen Lsg.

// 1.12.09

I.a. ist eine reelle $n \times n$-Matrix nicht diagonalisierbar. Es gilt aber

<u>Satz</u>

Sei $A$ eine reelle $n \times n$-Matrix mit $n$ paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dann ist $A$ <u>diagonalisierbar</u>.

In diesem Fall liefert der obige Satz also immer ein Fundamentalsystem.

<u>Bsp</u>

1) Die DGL

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

ist äquivalent zu dem System

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des char Polynoms

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id})$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3) + 2$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)$$

d.h. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$ ist eine Lsg des lin Gleichungssystems

$$(A - Id)\vec{x} = 0$$

bzw

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu $\lambda = 1$.

Ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$ ist eine Lsg von

$$(A - 2Id)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\binom{1}{2}$ ein Eigenvektor zu

$\lambda_2 = 2$.

Die Fkt

$$\vec{y}_1(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_2(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

bilden also ein Fundamentalsystem.

Die allgem Lsg der Ausgangsgl ist

die erste Komp von

$$\vec{y}(x) = c_1 \vec{y}_1(x) + c_2 \vec{y}_2(x).$$

2) Sei

$$\vec{y}\,' = A \vec{y}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von A sind

$\lambda_{1/2} = 1 \pm 2i$ mit Eigenvektoren

$v_{1/2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \pm 2i \end{pmatrix}$. Die Flt

$$\vec{y}_1 = e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 5 \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

$$= e^x (\cos 2x + i \sin 2x) \begin{pmatrix} 5 \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_2 = e^{(1-2i)x} \begin{pmatrix} 5 \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

$$= e^x (\cos 2x - i \sin 2x) \begin{pmatrix} 5 \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

bilden also ein Fundamental-system. Ein reelles Fundamental-system ist gegeben durch

$$\mathrm{Re}(\vec{y}_1) = \begin{pmatrix} 5e^x \cos 2x \\ e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}(\vec{y}_2) = \begin{pmatrix} 5e^x \sin 2x \\ e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x \end{pmatrix}$$

Die inhomogene Gl

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$$

kann man wie im 1-dim Fall durch <u>Variation der Konstanten</u> lösen.

Ist $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ ein Fundamental-system der homog GL, so macht man den Ansatz

$$\vec{y}_p(x) = c_1(x)\,\vec{y}_1(x) + \dots + c_n(x)\,\vec{y}_n(x)$$

für die partikuläre Lsg. Dann ist

$$\vec{y}_p\,' = \sum_{i=1}^{n} c_i'\,\vec{y}_i + \sum_{i=1}^{n} c_i\,\vec{y}_i\,'$$

und

$$A\vec{y}_p + \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\underbrace{A\vec{y}_i}_{=\vec{y}_i\,'} + \vec{b}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i\,\vec{y}_i\,' + \vec{b}$$

$\vec{y}_p$ erfüllt die inhomog DGL

also genau dann wenn

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' \vec{y}_i = \vec{b}$$

Da die $\vec{y}_i$ ein Fundamentalsystem bilden, läßt sich diese DGL eindeutig nach den $c_i'$ auflösen. Durch Integration erhält man die $c_i$.

Weitere Lösungsmethoden für Systeme von Differentialgl sind das Eliminationsverfahren und die Entkopplung der DGL durch geeignete Koordinatentransformation

Bsp

Die gekoppelten Pendel

$$m\ddot{x}_1 + d x_1 + K(x_1 - x_2) = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + d x_2 + K(x_2 - x_1) = 0$$

werden durch die Transformation

$$y_1 = x_1 + x_2$$

$$y_2 = x_1 - x_2$$

entkoppelt. Für $y_1, y_2$ gilt

$$\ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 = 0$$

$$\ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 = 0$$

Die Lsg dieser DGl liefert $x_1, x_2$.

## 4.4 Die Laplace-Transformation

Mit Hilfe der Laplace-Transformation lassen sich lin DGL mit Konst Koeffizienten in algebraische Gl transformieren.

Sei $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ so daß das Int

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

für mindestens ein $s \in \mathbb{R}$ existiert.

Dann gibt es ein $\sigma \in \mathbb{R}$ so daß

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

für $s > \sigma$ konvergiert und für $s < \sigma$ divergiert. $\sigma$ heißt Konvergenzabszisse von $f$ und $K_f = (\sigma, \infty)$ das <u>Konvergenzintervall</u> von $f$. Für $s \in K_f$ def wir die Fkt

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$F$ heißt die <u>Laplace-Transformierte</u> von $f$. Wir schreiben $F = \mathcal{L}(f)$.

Eine Fkt $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt <u>von höchstens exponentiellem</u>

Wachstum, wenn es Konst $\sigma, M \geq 0$ gibt, so daß

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$$

für alle $t \in [0, \infty)$.

Satz

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, d.h. $f$ hat auf beschränkten Intervallen nur endl. viele Unstetigkeitsstellen, und von höchstens exponentiellem Wachstum. Dann

1) $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ existiert für alle $s > \sigma$ und $F(s) \xrightarrow[s \to \infty]{} 0$.

2) Sei $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine weitere stückweise stetige Fkt von höchstens exponentiellem Wachstum mit $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$ für alle $s \in K_f \cap K_g$.

Dann ist $f(t) = g(t)$ für alle $t \in (0, \infty)$, in denen $f$ und $g$ stetig sind. Sind $f$ und $g$ zusätzlich rechtsseitig (linksseitig) stetig für alle $t \in [0, \infty)$, so folgt $f = g$.

<u>Bew</u>

Wir zeigen nur 1). Sei

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$$

für alle $t \geq 0$. Dann ist

$$\left| \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)|\, e^{-st}\, dt$$

$$\leq M \int_0^\infty e^{(\sigma - s)t}\, dt$$

$$= \frac{M}{\sigma - s}\, e^{(\sigma - s)t} \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{M}{s - \sigma}$$

für $s > \sigma$. Also existiert $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ für $s > \sigma$ und $F(s) \xrightarrow[s \to \infty]{} 0$.

$\square$

<u>Bsp</u>

Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\int_0^\infty e^{at} e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{a-s}$$

für $s > a$. Ist $s \leq a$, so gilt

$$\int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt = \infty$$

Also

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

<u>Satz</u>

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stückweise stetige Fkt von

höchstens exponentiellem Wachstum.
Dann ist $af+bg$ stückweise stetig und von höchstens exponentiellem Wachstum und

$$\mathcal{L}(af+bg)(s) = a\,\mathcal{L}(f)(s) + b\,\mathcal{L}(g)(s)$$

für $s$ hinreichend groß.

Satz

Sei $c>0$ und $f:[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stückw. stetig und von höchstens exponentiellem Wachstum. Dann gilt dies auch für $f(ct)$ und

$$\mathcal{L}(f(ct))(s) = \frac{1}{c}(\mathcal{L}f)\left(\frac{s}{c}\right)$$

Bew

Sei $|f(t)| \le M e^{\sigma t}$ für alle $t \ge 0$.

Dann gilt $|f(ct)| \le M e^{c\sigma t}$ für alle $t \ge 0$ und

$$\mathcal{L}(f(ct))(s) = \int_0^\infty f(ct)\, e^{-st}\, dt$$

$$\underset{x = ct}{=} \frac{1}{c} \int_0^\infty f(x)\, e^{-\frac{s}{c}x}\, dx$$

$$= \frac{1}{c}\,\mathcal{L}(f)\left(\frac{s}{c}\right)$$

$\square$

// 7.12.09

Entscheidend für die Anwendung der Laplace-Transformation ist das folgende Resultat

Theorem

Sei $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $n$-mal differenzierbar (rechtsseitig in $0$) und $f, f', \dots, f^{(n)}$ seien von höchstens exponentiellem Wachstum. Dann gilt

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

<u>Bew</u>

Sei $1 \leq k \leq n$. Dann ist

$$\mathcal{L}(f^{(k)})(s) = \int_0^\infty f^{(k)}(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= f^{(k-1)}(t)\, e^{-st} \Big|_0^\infty$$

$$+ s \int_0^\infty f^{(k-1)}(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= s\, \mathcal{L}(f^{(k-1)})(s) - f^{(k-1)}(0)$$

Die Beh folgt nun durch Ind über $n$.

$\square$

Bsp

1) Für $n=1$ resp $n=2$ ist

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\,\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

bzw

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\,\mathcal{L}(f)(s) - s f(0) - f'(0)$$

2) $f(t) = t^n$ hat die $n$-te Ableitung $f^{(n)}(t) = n!$. Somit ist $\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = \frac{n!}{s}$. Nach dem letzten Satz ist

$$\frac{n!}{s} = s^n\,\mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Mit

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

folgt

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

bzw

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad , \quad s > 0$$

3) Sei $\omega > 0$ und

$$f(t) = \sin \omega t$$

Dann ist

$$f'(t) = \omega \cos \omega t \quad , \quad f'(0) = \omega$$

$$f''(t) = -\omega^2 \sin \omega t$$

Damit

$$\mathcal{L}(-\omega^2 \sin \omega t)(s) = s^2 \mathcal{L}(\sin \omega t)(s) - \omega$$

so daß

$$(s^2+\omega^2)\, \mathcal{L}(\sin\omega t)(s) = \omega$$

Also

$$\mathcal{L}(\sin\omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

<u>Satz</u>

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und von höchstens exponentiellem Wachstum. Def

$$g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$$

Dann ist

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}(f)(s)$$

Bew.

Es ist

$$|f(t)| \le M e^{\sigma t}$$

für alle $t \ge 0$. Wir können annehmen, daß $\sigma > 0$. Dann ist

$$|g(t)| = \left| \int_0^t f(x)\,dx \right|$$

$$\le \int_0^t |f(x)|\,dx \le M \int_0^t e^{\sigma x}\,dx$$

$$= \frac{M}{\sigma} e^{\sigma x} \Big|_0^t$$

$$= \frac{M}{\sigma} \left( e^{\sigma t} - 1 \right)$$

$$\leq \frac{M}{\sigma} e^{\sigma t}$$

d.h. $g$ ist von höchstens exponentiellem Wachstum.

Da $f$ stetig ist, ist $g$ differenzierbar und $g'(t) = f(t)$.

Es folgt

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g'(t))$$

$$= s\,\mathcal{L}(g)(s) + \underbrace{g(0)}_{=0}$$

$\square$

<u>Satz</u> (Dämpfung und Verschiebung)

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und von höchstens exp. Wachstum. Def $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$.

1) Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = F(s+a)$$

2) Für $a \geq 0$ def

$$f_a(t) = \begin{cases} f(t-a) & \text{für } t \geq a \\ 0 & \text{für } 0 \leq t < a \end{cases}$$

Dann ist

$$\mathcal{L}(f_a)(s) = e^{-as} F(s)$$

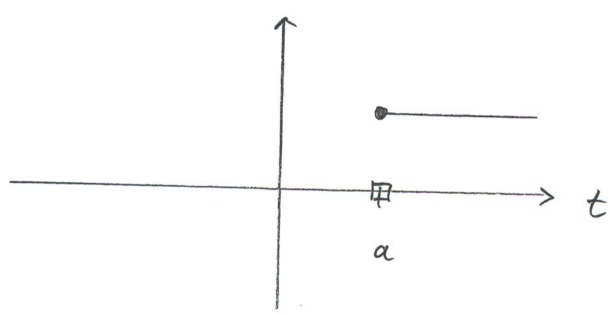
Bsp

1) Sei

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Dann ist für $a \geq 0$

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ 1 & \text{für } t \geq a \end{cases}$$



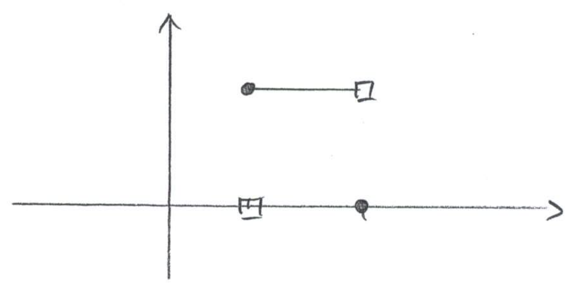

und

$$\mathcal{L}(H_a)(s) = \frac{e^{-as}}{s} \quad , \quad s > 0$$

2) Der Rechteckimpuls

$$w(t) = H(t-a) - H(t-b)$$

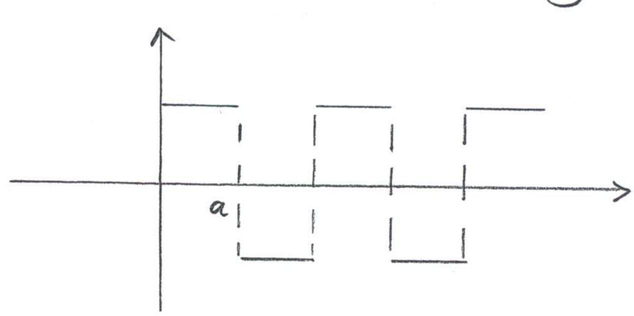
mit $0 \leq a < b$ , $t \geq 0$



hat Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}(w) = \frac{1}{s}\left(e^{-as} - e^{-bs}\right)$$

3) Die Rechteckschwingung



läßt sich schreiben als

$$W_\infty(t) = H(t) - 2H(t-a) + 2H(t-2a) - 2H(t-3a) + \ldots$$

$$= H(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n H(t-na)$$

$$= H(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n H_{na}(t)$$

so daß

$$\mathcal{L}(W_\infty)(s) = \mathcal{L}(H)(s) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathcal{L}(H_{na})(s)$$

$$= \frac{1}{s}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-ans}\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(-1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-e^{as})^n\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(-1 + 2\,\frac{1}{1+e^{-as}}\right)$$

$$= \frac{1}{s}\tanh\frac{a}{2}s$$

Für stückweise stetige Fkt $f, g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ def wir das <u>Faltungsprodukt</u>

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx$$

<u>Satz</u>

Sind $f, g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetige Fkt von höchstens exp Wachstum, so gilt dies auch für für $f*g$ und

$$\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g)$$

<u>Bsp</u>

1) Sei $f(t) = 1-at$. Dann ist

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s} - \frac{a}{s^2} = \frac{s-a}{s^2}$$

und

$$\mathcal{L}\left((1-at)\,e^{-at}\right) = \frac{s}{(s+a)^2}$$

2) Hier ist eine kleine Tabelle

mit Laplace-Transformierten

| $f(t)$ | |
|---|---|
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s>0$ |
| $e^{at}, \quad a \in \mathbb{R}$ | $\frac{1}{s-a}, \quad s>a$ |
| $\sin at, \quad a>0$ | $\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s>0$ |
| $\cos at, \quad a>0$ | $\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s>0$ |
| $\sinh at, \quad a>0$ | $\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s>a$ |
| $\cosh at, \quad a>0$ | $\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s>a$ |
| $e^{-at}\, t^n, \quad a \in \mathbb{R}$ | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}, \quad s>-a$ |
| $(1-at)\, e^{-at}, \quad a \in \mathbb{R}$ | $\frac{s}{(s+a)^2}, \quad s>-a$ |

Mit Hilfe der Laplace-Transformation lassen sich lin DGL mit Konst Koeff lösen. Wir illustrieren das an folgendem Beispiel

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$

Setze $y = f$ und $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$

Dann

$$\mathcal{L}(f'') - 6\,\mathcal{L}(f') + 9\,\mathcal{L}(f) = 0$$

Mit

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$
$$= s^2 F(s) - s$$

$$\mathcal{L}(f')(s) = s F(s) - 1$$

folgt

$$(s^2 F(s) - s) - 6(s F(s) - 1) + 9 F(s) = 0$$

so daß

$$s^2 F(s) - 6s F(s) + 9 F(s) = s - 6$$

und

$$F(s) = \frac{s-6}{s^2 - 6s + 9} = \frac{s-6}{(s-3)^2}$$

$$= \frac{s}{(s-3)^2} - \frac{6}{(s-3)^2}$$

Aus der obigen Tabelle folgt

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$$

$$= \mathcal{L}\left( (1+3t)\, e^{3t} - 6 e^{3t}\, t \right)$$

Also

$$f(t) = (1-3t)\, e^{3t}$$

//

8.12.09