4. Differentialgleichungssysteme und Differentialgl. höherer Ordnung

In diesem Kapitel studieren wir Differentialgleichungssysteme und Differentialgleichungen höherer Ordnung

4.1 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, .., n-1$, und $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Fkt.

Dann heißt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)$$

eine Differentialgl n-ter Ordnung auf I. Ist b nicht identisch 0, so heißt die DGL inhomogen, ansonsten homogen. Die DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

wird als zugehörige homogene Gleichung bezeichnet.

Der Operator

$$L : C^n(I) \longrightarrow C^0(I)$$

$$y \longmapsto Ly$$

mit

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y$$

ist linear, d.h.

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L y_1 + c_2 L y_2$$

<u>Theorem</u>

Der Raum der Lsg der DGL $Ly = 0$ hat Dimension n.

Es gibt also n lin. unabh. Fkt

$y_1, \dots, y_n$ mit $Ly_i = 0$. Eine beliebige

Lsg y der DGL $Ly = 0$ läßt sich

mit Hilfe dieser Fkt eindeutig

schreiben als

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

mit geeigneten Koeff $c_i \in \mathbb{R}$. Die

Fkt $y_1, \dots, y_n$ werden als Fundamentalsystem der DGL $Ly = 0$

bezeichnet.

Um die homogene DGL $Ly = 0$

zu lösen, muß man also die

Jetzt $y_1, \dots, y_n$ bestimmen.

Satz

Sei $\hat{y}$ eine spezielle Lsg der inhomogenen DGL $Ly = b$.

Sei y eine beliebige Lsg der inhomogenen DGL $Ly = b$.

Dann ist

$$y = \hat{y} + y_h$$

wobei y_h eine geeignete Lsg der homogenen DGL $Ly = 0$ ist.

Bew

$$L(y - \hat{y}) = Ly - L\hat{y} = b - b = 0$$

d.h. $y-\tilde{y}$ löst die homogene DGL.

Also $y-\tilde{y} = y_h$ mit $Ly_h = 0$.

$\square$

Theorem

Das Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
Ly &= b \\
y(x_0) &= y_0 \\
y'(x_0) &= y_0' \\
&\vdots \\
y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

mit $x_0 \in I$ und $y_0, \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ beliebig hat genau eine Lsg. Sie existiert auf dem ganzen Intervall I und hängt in jedem kompakten Teilintervall $J \subset I$ stetig von den a_i und b ab.

Insbesondere ist also die Nullfkt die eindeutige Lsg der DGL $Ly = 0$ mit $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Seien $y_1, \ldots, y_n$ Lsg der homogenen DGL $Ly = 0$. Dann sind die y_i in $C^n(I)$. Wir def

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Es folgt

<u>Satz</u>

Sind die Fkt $y_1, \ldots, y_n$ lin abh.

so ist $(\det W)(x) = 0$ für alle $x \in I$.

Weiterhin gilt

<u>Satz</u>

1) Es ist <u>entweder</u> $(\det W)(x) = 0$ für alle $x \in I$ <u>oder</u> $(\det W)(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

2) Die Fkt $y_1, \ldots, y_n$ bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $(\det W)(x)$ für ein $x_0 \in I$ ungleich 0 ist.

Bew

1) Sei $(\det W)(x_0) = 0$ für $x_0 \in I$. Dann sind die Spalten von $W(x_0)$ lin abh, d.h. das lin Gleichungssystem

$$c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0$$
$$c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = 0$$
$$\vdots$$
$$c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

hat eine nichttriv Lsg $(c_1, \dots, c_n)$.

Def

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

Dann erfüllt y das Anfangswertproblem

$$Ly = 0$$

$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Aus der Eindeutigkeit der Lsg dieses Anfangswertproblems folgt

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0$$

für alle $x \in I$. Durch wiederholte Differentiation dieser Gl sehen wir, daß die Vektoren

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} y_n \\ y_n' \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

für alle $x \in I$ lin abh. sind. Somit ist $(\det W)(x) = 0$ für alle $x \in I$.

2) Seien $y_1, \dots, y_n$ lin unabh. Angenommen $(\det W)(x_0) = 0$ für ein $x \in I_0$. Dann können wir wie eben Koeffizienten $c_i \in \mathbb{R}$ finden, so daß $c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$ für alle $x \in I$. Das widerspricht aber der lin Unabh. Also $(\det W)(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

$\square$

<u>Bsp</u>

Gegeben sei die lin homog. DGL

$$y'' + y = 0$$

auf $I = \mathbb{R}$.

$$y_1(x) = \sin x$$
$$y_2(x) = \cos x$$

lösen die DGL und

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}$$

Die Wronskidet ist also

$$(\det W)(x) = -\sin^2 x - \cos^2 x$$
$$= -1$$

Die Fkt y_1, y_2 bilden also ein Fundamentalsystem auf $\mathbb{R}$.

Wir betrachten wieder die lin DGL n-ter Ordnung

$$Ly = 0$$

Im Fall n=1 findet man durch Sep der Variablen leicht eine Lsg der DGL. Für höhere n gibt es kein allgemeines Verfahren n lin unabh. Lsg zu bestimmen. Hat man allerdings schon eine Lsg, so kann man das d'Alembertsche Reduktionsverfahren anwenden.

//

17.11.09

Satz

Sei $y_1(x)$ eine Lsg der homogenen lin DGL

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots$$
$$+ a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

die auf ganz I ungleich 0 ist.

Geht man mit dem Ansatz

$$\underline{y = y_1 v}$$

in $(*)$ ein, so erhält man für v eine Differentialgl der Form

$$v^{(n)} + b_{n-1} v^{(n-1)} + \dots + b_1 v' = 0$$

mit stetigen $b_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Diese geht nach der Substitution

$$\underline{w = v'}$$

über in die homogene DGL $(n-1)$-ter Ordnung

$$w^{(n-1)} + b_{n-1} w^{(n-2)} + \dots + b_1 w = 0$$

Sei $w_2, \dots, w_n$ ein Fundamentalsystem dieser DGL. Def

$$v_j = \int w_j \, dx$$

für $j = 2, \dots, n$. Dann ist

$$y_1, y_1 v_2, \dots, y_1 v_n$$

ein Fundamentalsystem der Ausgangsgl (*).

<u>Bsp</u>

Wir betrachten die Gl

$$y'' - \frac{1}{2x} y' + \frac{1}{2x^2} y = 0$$

auf $I = (0, \infty)$. Durch Raten finden wir die Lsg $y_1(x) = x$. Diese ist $\neq 0$ auf ganz I. Setze

$$y = y_1 v$$

Dann ist

$$y' = y_1 v' + y_1' v$$

$$y'' = y_1 v'' + y_1' v' + y_1' v' + y_1'' v$$

$$= y_1 v'' + 2 y_1' v' + y_1'' v$$

so daß

$$0 = y'' - \frac{1}{2x} y' + \frac{1}{2x^2} y$$

$$= \left(y_1 v'' + 2 y_1' v' + y_1'' v \right)$$

$$- \frac{1}{2x} \left(y_1 v' + y_1' v \right) + \frac{1}{2x^2} y_1 v$$

$$= \left(y_1'' - \frac{1}{2x} y_1' + \frac{1}{2x^2} y_1 \right) v$$

$$+ y_1 v'' + 2 y_1' v' - \frac{1}{2x} y_1 v'$$

$$= y_1 \left(v'' + 2 \frac{y_1'}{y_1} v' - \frac{1}{2x} v' \right)$$

Wegen $y_1 \neq 0$ auf I folgt

$$v'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} - \frac{1}{2x}\right) v' = 0$$

Setze $w = v'$. Dann

$$w' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} - \frac{1}{2x}\right) w = 0$$

bzw.

$$w' + \underbrace{\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x}\right)}_{\frac{3}{2}\frac{1}{x}} w = 0$$

Damit

$$\int \frac{dw}{w} = -\frac{3}{2} \int \frac{dx}{x}$$

Also

$$\ln|w| = -\frac{3}{2}\ln x + \text{const}$$

so daß

$$w = \frac{c}{x^{3/2}} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Dann

$$v = \int w\,dx = -\frac{2c}{x^{1/2}}$$

Also bilden

$$y_1(x) = x$$
$$y_2(x) = \sqrt{x}$$

ein Fundamentalsystem der DGL.

Zur Kontrolle berechnen wir die

Wronski det

$$(\det W)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x^{1/2} \\ 1 & \frac{1}{2} x^{-1/2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} x^{1/2} - x^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{2} x^{1/2} \neq 0$$

für alle $x \in I$.

Wir betrachten nun wieder die lin DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b$$

Sei $y_1, \dots, y_n$ ein Fundamental-system der homogenen Gl $Ly = 0$. Wir können eine partikuläre Lsg der inhomogenen Gl $Ly = b$ durch folgenden <u>Variationsansatz</u> finden

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

mit

$$c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n = 0$$
$$c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n' = 0$$
$$\vdots$$
$$c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0$$

(falls $n \geq 2$).

Dann ist

$$y' = c_1 y_1' + \dots + c_n y_n' + \underbrace{(c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n)}_{=0}$$

$$y'' = c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n'' + \underbrace{(c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n')}_{=0}$$

und allgemein

$$y^{(k)} = c_1 y_1^{(k)} + \dots + c_n y_n^{(k)}$$

für $k = 0, \dots, n-1$. Weiterhin

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} + c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)}$$

Aus

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} c_k' y_k^{(n-1)}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} c_k' y_k^{(n-1)}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(k)} = b$$

Es ist

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=0}^{n-1} a_k y_j^{(k)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{\left(y_j^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y_j^{(k)} \right)}_{= L y_j = 0} = 0$$

Also

$$\sum_{k=1}^{n} c_k' y_k^{(n-1)} = b$$

Insgesamt müssen die c_j dann folgendem Gleichungs- system genügen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{W(x)} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Da $(\det W)(x) \neq 0$ ist, läßt sich dieses Gleichungssystem immer lösen. Daraus erhalten wir die Fkt. c_j'. Integration liefert die Fkt c_j. Die Fkt

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

erfüllt dann per constructionem

$$Ly = b.$$

Bsp

Wir bestimmen die allgem Lsg von

$$y'' - \frac{1}{2x} y' + \frac{1}{2x^2} y = x$$

auf $I = (0, \infty)$. Aus dem vorherigen Bsp wissen wir, daß die Fkt

$$y_1(x) = x$$
$$y_2(x) = \sqrt{x}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gl bilden. Für die spezielle Lsg machen wir den Ansatz

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

mit

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

Dann ist

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} x & x^{1/2} \\ 1 & \frac{1}{2} x^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

(Bem: Falls $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$, gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$)

und

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = -2x^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^{-1/2} & -x^{1/2} \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

so daß

$$c_1' = 2x$$

$$c_2' = -2x^{3/2}$$

Es folgt

$$c_1 = x^2$$

$$c_2 = -\frac{4}{5}x^{5/2}$$

und

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = \frac{1}{5}x^3$$

Die allgemeine Lsg der DGL lautet also

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + c_1 x + c_2\sqrt{x}$$

mit $c_i \in \mathbb{R}$. // 23.11.09

4.2 Lineare Differentialgleichungen mit konst Koeffizienten

Wir betrachten nun die lin DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $b: I \to \mathbb{R}$ stetig

In diesem Fall gibt es eine sehr befriedigende Lösungstheorie.

Die Lsg der homogenen DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$$

ist äquivalent zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms.

Zur Bestimmung eines Fundamentalsystems der homog DGL machen wir den Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

Dann ist

$$y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$$

und Einsetzen von $y(x)$ in die homogene DGL liefert

$$\underbrace{(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)}_{=: P(\lambda)} e^{\lambda x} = 0$$

d.h. $y(x)$ erfüllt die homog DGL genau dann, wenn λ eine NST des <u>charakteristischen Polynoms</u>

$$P(\mu) = \mu^n + a_{n-1}\mu^{n-1} + \dots + a_1\mu + a_0$$

ist.

P hat Grad n und somit genau n nicht notwendig verschiedene NST in $\mathbb{C}$. Wir können P schreiben als

$$P(\mu) = (\mu - \lambda_1)^{n_1} \dots (\mu - \lambda_k)^{n_k}$$

mit paarweise verschiedenen $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

Hat p n paarweise verschiedene NST $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ so bilden die Fkt

$$y_i = e^{\lambda_i x},$$

$i = 1, \dots, n$, ein Fundamentalsystem über $\mathbb{C}$, denn die Wronskidet ist für $x = 0$

$$(\det W)(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i > j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

Vandermondsche Determinante

(Bsp $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1$)

Ist $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\beta \neq 0$ eine komplexe NST von P, so ist auch $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ eine NST von P, da die Koeff von P reell sind. In dem Fall sind

$$y_+(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$$
$$= e^{\alpha x} (\cos\beta x + i \sin \beta x)$$

und

$$y_-(x) = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$
$$= e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

Lsg der homog DGL. Da die Lsg der homog DGL einen

Vektorraum bilden, sind auch

$$y_1 = \frac{1}{2}(y_+ + y_-) = \mathrm{Re}(y_+) = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_2 = \frac{1}{2i}(y_+ - y_-) = \mathrm{Im}(y_+) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Lsg der homog DGL. Wegen

$$y_+ = y_1 + i y_2$$

$$y_- = y_1 - i y_2$$

Kann man die Basisvektoren y_+, y_- also durch die Basisvektoren y_1, y_2 ersetzen.

Ist λ eine k-fache NST von P, so gehören die k lin unabh Lsg

$$e^{\lambda x}, \; x e^{\lambda x}, \; \dots, \; x^{k-1} e^{\lambda x}$$

zu λ.

Wir fassen die Resultate zusammen

Theorem

Sei P das char Polynom der lin homog DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

1) Ist λ k-fache reelle NST von P, so korrespondieren zu λ die k lin unabh. Lsg

$$e^{\lambda x}, \; x e^{\lambda x}, \; \dots, \; x^{k-1} e^{\lambda x}$$

2) Ist $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\beta > 0$ k-fache komplexe NST von P, so ist auch $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ k-fache komplexe NST von P und zu $\lambda, \bar{\lambda}$ korrespondieren die $2k$ lin. unabh. Lsg

$$e^{\lambda x},\ x e^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1} e^{\lambda x}$$
$$e^{\bar{\lambda} x},\ x e^{\bar{\lambda} x},\ \dots,\ x^{k-1} e^{\bar{\lambda} x}$$

bzw

$$e^{\alpha x} \cos x,\ x e^{\alpha x} \cos x,\ \dots,\ x^{k-1} e^{\alpha x} \cos x$$
$$e^{\alpha x} \sin x,\ x e^{\alpha x} \sin x,\ \dots,\ x^{k-1} e^{\alpha x} \sin x$$

Die n Funktionen, die man auf diese Weise erhält, bilden ein Fundamentalsystem der homog DGL.

Bsp

1) Wir betrachten die DGL

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P(\mu) = \mu^4 + 8\mu^2 + 16$$

$$= (\mu^2 + 4)^2$$

$$= (\mu + 2i)^2 (\mu - 2i)^2$$

Die NST von P sind $\pm 2i$. Beide haben Vielfachheit 2. Also bilden die 4 Fkt

$$\sin 2x, \quad x \sin 2x$$

$$\cos 2x, \quad x \cos 2x$$

ein Fundamentalsystem.

2) Sei $\omega_0 > 0$. Die DGL

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

beschreibt eine ungedämpfte Schwingung. Das char. Polynom

$$P(\mu) = \mu^2 + \omega_0^2$$
$$= (\mu + i\omega_0)(\mu - i\omega_0)$$

hat NST $\mu = \pm i\omega_0$. Die Fkt

$$\sin \omega_0 t$$
$$\cos \omega_0 t$$

bilden also ein Fundamental-system.

3) Eine gedämpfte Schwingung wird beschrieben durch

$$\ddot{x} + 2\mu \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit $\mu \geq 0$, $\omega_0 > 0$. Das char Polynom ist

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2$$

mit Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

Wir unterscheiden 3 Fälle

1) $\underline{\mu > \omega_0}$ (aperiodischer Fall)

In diesem Fall hat P zwei

verschiedene reelle NST

$$\lambda_{1/2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

$$= -\mu_{1/2}$$

Beide sind negativ. Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$e^{-\mu_1 t}$$
$$e^{-\mu_2 t}$$

2) $\underline{\mu = \omega_0}$ (aperiodischer Grenzfall)

In diesem Fall hat P eine doppelte reelle NST

$$\lambda = -\mu$$

Ein Fundamentalsystem ist

$$e^{-\mu t}, \quad t e^{-\mu t}$$

3) $\underline{0 \leq \mu < \omega_0}$ (periodischer Fall)

Dann hat P zwei komplexe NST

$$\lambda_{1/2} = -\mu \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}}_{=:\omega}$$

$$= -\mu \pm i\omega$$

Ein Fundamentalsystem ist

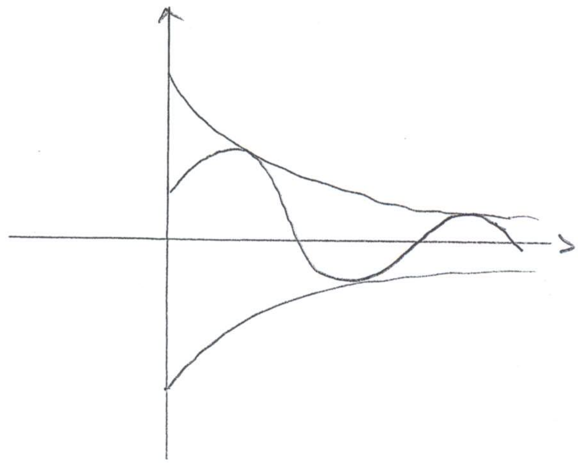
$$e^{-\mu t} \sin \omega t$$

$$e^{-\mu t} \cos \omega t$$

Die allgemeine Lsg ist

$$x(t) = e^{-\mu t} (c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t)$$

$$= a e^{-\mu t} \sin(\omega t - \varphi)$$



Falls $0 < \mu < \omega_0$, so hat man eine gedämpfte Schwingung mit Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$$

Falls $\mu \geq \omega_0$ so tritt keine echte Schwingung auf

In beiden Fällen geht die Amplitude gegen 0 für $t \to \infty$.

Die inhomogene Gl

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b$$

Kann man wieder durch Variation der Konstanten lösen. Allerdings ist es in vielen Fällen einfacher einen Ansatz vom Typ der Störfunktion zu machen

<u>Theorem</u>

Gegeben sei die inhomog lin DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $b : I \to \mathbb{R}$ stetig.

Sei

$$P(\mu) = \mu^n + a_{n-1}\mu^{n-1} + \dots + a_0$$

das char Polynom der zugehörigen homogenen Gl. Ist b der Form

$$b(x) = (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)\, e^{\alpha x} \begin{cases} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{cases}$$

so hat die inhomogene DGL eine Lsg der Form

$$\{ (A_0 + A_1 x + \dots + A_m x^m) \cos\beta x$$
$$+ (B_0 + B_1 x + \dots + B_m x^m) \sin \beta x \} e^{\alpha x}$$

falls $P(\alpha + i\beta) \neq 0$ und

$$x^k \{ (A_0 + A_1 x + .. + A_m x^m) \cos \beta x$$
$$+ (B_0 + B_1 x + .. + B_m x^m) \sin \beta x \} e^{\alpha x}$$

falls $\alpha + i\beta$ k-fache NST von P ist.

Die Koeff A_i, B_i lassen sich durch Einsetzen des Ansatzes in die DGL und anschließenden Koeffizientenvgl bestimmen.

<u>Bsp</u>

1) Die DGL

$$y^{(3)} + 2y'' + y' = x + 2e^{-x}$$

hat das Polynom

$$P(\mu) = \mu^3 + 2\mu^2 + \mu$$
$$= \mu(\mu^2 + 2\mu + 1)$$
$$= \mu(\mu+1)^2$$

Somit ist $\mu = 0$ einfache NST und $\mu = -1$ zweifache NST. Folglich bilden die Fkt

$$y_1(x) = 1$$
$$y_2(x) = e^{-x}$$
$$y_3(x) = x e^{-x}$$

ein Fundamentalsystem der zugehörigen homog Gl. Um eine Lsg der inhomog Gl zu finden, reicht es Lsg der Gl

$$y^{(3)} + 2y'' + y' = x \qquad (1)$$

$$y^{(3)} + 2y'' + y' = 2e^{-x} \qquad (2)$$

zu bestimmen.

Da 0 eine einfache NST von P ist, hat (1) eine Lsg der Form

$$y = x(A_0 + A_1 x) = A_1 x^2 + A_0 x$$

Dann ist

$$y' = 2A_1 x + A_0$$
$$y'' = 2A_1$$
$$y''' = 0$$

und (1) liefert

$$4A_1 + 2A_1 x + A_0 = x$$

so daß $A_1 = 1/2$ und $A_0 = -2$. Die Fkt

$$y(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - 2x$$

löst also (1).

Da -1 eine doppelte NST von p ist, hat (2) eine Lsg der Form

$$y(x) = x^2 A_0 e^{-x} = A_0 x^2 e^{-x}$$

Dann ist

$$y'(x) = A_0\, 2x e^{-x} - A_0 x^2 e^{-x}$$
$$= A_0 (2x - x^2)\, e^{-x}$$

$$y'(x) = A_0 (2 - 2x)\, e^{-x}$$
$$- A_0 (2x - x^2)\, e^{-x}$$
$$= A_0 (2 - 4x + x^2)\, e^{-x}$$

$$y^{(3)} = A_0(-4+2x)e^{-x}$$

$$- A_0(2-4x+x^2)e^{-x}$$

$$= A_0(-6+6x-x^2)e^{-x}$$

und (2) liefert

$$A_0 e^{-x}\left((-6+6x-x^2) + 2(2-4x+x^2) + (2x-x^2) \right) = 2e^{-x}$$

so daß $A_0 = -1$. Also ist

$$y(x) = -x^2 e^{-x}$$

ein Lsg von (2).

Eine spezielle Lsg von

$$y^{(3)} + 2y'' + y' = x + 2e^{-x}$$

ist also gegeben durch

$$\underline{y(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - 2x - x^2 e^{-x}}$$

// 24.11.09

2) Die DGL

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = a\cos\omega t$$

$$\mu \geq 0, \ \omega_0 > 0, \ \omega > 0, \ a > 0$$

beschreibt einen periodisch angeregten harmonischen Oszillator. Die homogene GL

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

haben wir bereits gelöst. Wir

bestimmen nun die Lsg der in-
homogenen GL. Hier müssen 2
Fälle unterschieden werden

a) $\underline{\mu = 0, \omega = \omega_0}$

In diesem Fall schwingt der
Oszillator ohne Reibung und wird
in seiner Eigenfrequenz angeregt.
Das char Polynom der DGL ist

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2 = (\lambda + i\omega_0)(\lambda - i\omega_0)$$

Da $i\omega_0$ eine einfache NST von P
ist können wir folgenden Ansatz
für eine partikuläre Lsg der

der inhomog Gl machen

$$x_p(t) = t\left(A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \sin \omega_0 t\right)$$

Dann ist

$$\ddot{x}_p(t) = t\left(-A_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t - B_0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t\right)$$
$$+ 2\left(-A_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + B_0 \omega_0 \cos \omega_0 t\right)$$

Einsetzen in die inhomog DGL liefert

$$t\left(-A_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t - B_0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t\right)$$
$$+ 2\left(-A_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + B_0 \omega_0 \cos \omega_0 t\right)$$
$$+ \omega_0^2 t\left(A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \sin \omega_0 t\right)$$
$$= a \cos \omega_0 t$$

so daß

$$-2A_0\,\omega_0 \sin\omega_0 t + (2B_0\omega_0 - a)\cos\omega_0 t = 0$$

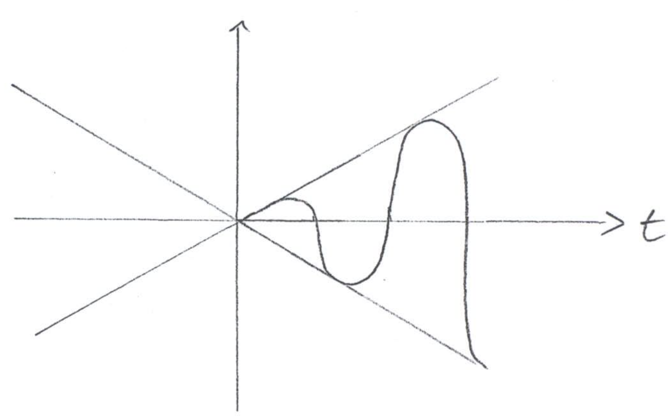
Da die Fkt $\sin\omega_0 t$, $\cos\omega_0 t$ lin unabh sind folgt

$$A_0 = 0$$

$$2B_0\omega_0 - a = 0$$

d.h.

$$\underline{x_p(t) = \frac{a}{2\omega_0}\, t \sin\omega_0 t}$$



Die allgem Lsg ist

$$x(t) = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t$$

$$+ \frac{a}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

Da die Amplitude der part Lsg gegen ∞ geht, kommt es zur Resonanz Katastrophe. Beispiele solcher Katastrophen sind Brücken-einstürze oder Brüche von Trag-flächen.

b) $\underline{\mu > 0}$

Die DGL lautet dann

$$\ddot{x} + 2\mu \dot{x} + \omega_0^2 x = a \cos \omega t$$

und das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2$$

mit NST

$$\lambda_{1/2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

Da $\mu > 0$, ist $P(i\omega) \neq 0$. Somit hat die inhomog DGL eine Lsg der Form

$$x_p(t) = A_0 \cos \omega t + B_0 \sin \omega t$$

Dann ist

$$\dot{x}_p(t) = -A_0 \omega \sin \omega t + B_0 \omega \cos \omega t$$

$$\ddot{x}_p(t) = -A_0\,\omega^2 \cos\omega t - B_0\,\omega^2 \sin\omega t$$

Einsetzen in die inhomog DGL liefert

$$-A_0\,\omega^2 \cos\omega t - B_0\,\omega^2 \sin\omega t$$
$$-2\mu A_0\,\omega \sin\omega t + 2\mu B_0\,\omega \cos\omega t$$
$$+\omega_0^2 A_0 \cos\omega t + \omega_0^2 B_0 \sin\omega t$$
$$= a \cos\omega t$$

so daß

$$\left(A_0(\omega_0^2-\omega^2) + B_0\,2\mu\omega\right)\cos\omega t$$
$$\left(B_0(\omega_0^2-\omega^2) - A_0\,2\mu\omega\right)\sin\omega t$$
$$= a\cos\omega t$$

Aus der Lin Unabhängigkeit der Fkt $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ folgt

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A_0 + (2\mu\omega) B_0 = a$$

$$-2\mu\omega A_0 + (\omega_0^2 - \omega^2) B_0 = 0$$

Wir erhalten

$$A_0 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2} a$$

$$B_0 = \frac{2\mu\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} A_0$$

$$= \frac{2\mu\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2} a$$

Diese Lsg läßt sich wieder um-schreiben.

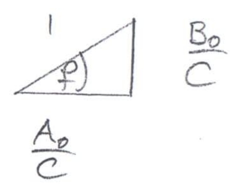
$$x_p(t) = A_0 \cos \omega t + B_0 \sin \omega t$$

$$= C \left(\frac{A_0}{C} \cos \omega t + \frac{B_0}{C} \sin \omega t \right)$$

mit $C = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}$. Da $\left(\frac{A_0}{C}\right)^2 + \left(\frac{B_0}{C}\right)^2 = 1$, gibt es ein eindeutiges $\varphi \in [0, 2\pi)$ so daß

$$\frac{A_0}{C} = \cos \varphi$$

$$\frac{B_0}{C} = \sin \varphi$$



Dann ist

$$\tan \varphi = \frac{B_0}{A_0}$$

Also

$$x_p(t) = C\,(\underbrace{\cos\varphi \cos\omega t + \sin\varphi \sin\omega t}_{\cos(\omega t - \varphi)})$$

$$= \underline{C \cos(\omega t - \varphi)}$$

mit

$$C = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{B_0}{A_0} = \arctan \frac{2\mu\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Die Amplitudenverstärkung

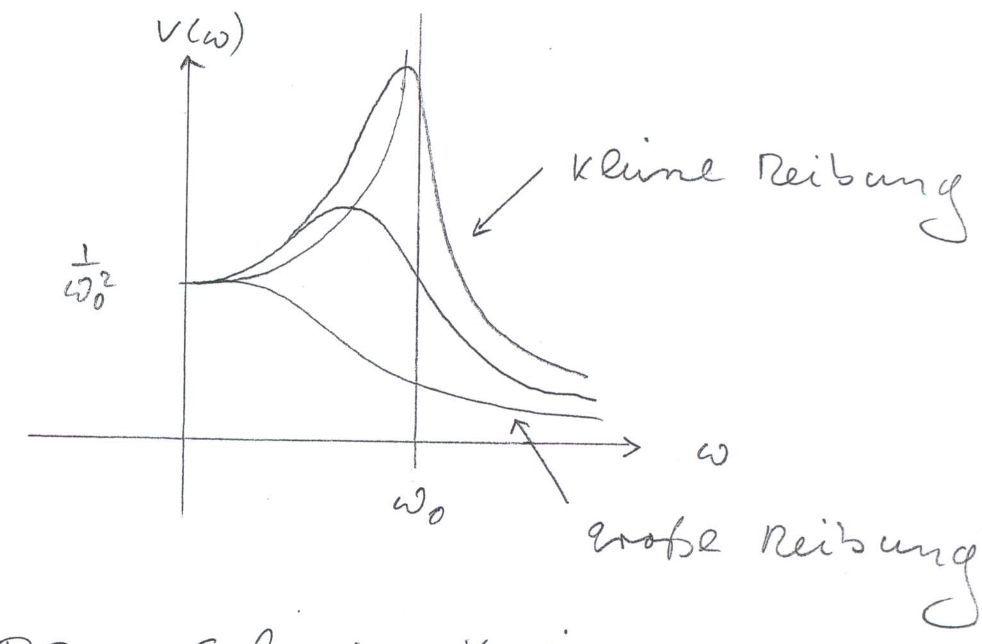
$$V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}}$$

hat bei kleiner Reibung, d.h.

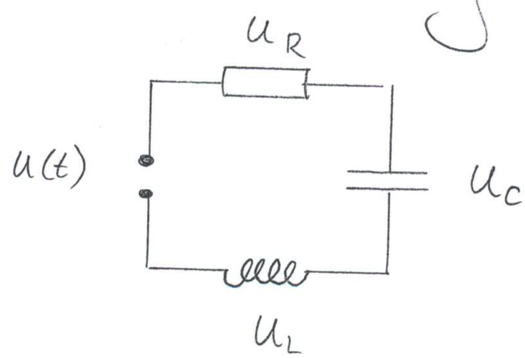
$$\mu^2 < \frac{1}{2}\omega_0^2$$

ein Maximum bei der Resonanz-frequenz

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\mu^2}$$



3) Der RCL-Schwingkreis



Es ist

$$U_R = R I$$

$$U_C = \frac{1}{C} Q \quad , \quad \dot{Q} = I$$

$$U_L = L \dot{I}$$

Aus

$$U(t) = U_R + U_C + U_L$$

folgt dann

$$\dot{U} = R\dot{I} + \frac{1}{C} I + L\ddot{I}$$

bzw

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC} I = \frac{1}{L}\dot{U}$$

Ist die anglegte Spannund der Form $U(t) = U_0 \sin \omega t$, so erhält man die eben behandelte DGL.

4.3 Systeme von Differentialgleichungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und

$$f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y_1, \dots, y_n) \longmapsto f_i(x, y_1, \dots, y_n)$$

$i = 1, \dots, n$. Dann wird

$$y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n)$$