Es gilt $I_h(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, d.h. $I_h(t)$ beschreibt das Einschwingverhalten.

$I_p(t)$ ist eine stationäre Lsg.

Der Strom wird durch die Spule phasenverschoben und hinkt der Spannung hinterher.

3.5 Die Gleichung $y'' = f(y)$

Die Differentialgleichung $y'' = f(y)$ tritt in der Physik als Bewegungsgleichung einer Punktmasse, die einer ortsabh. Kraft unterliegt, auf:

$$m\ddot{x} = K(x) \qquad (*)$$

Wir nehmen an, daß K auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ stetig ist, und def

$$U(x) = -\int K(x)\,dx$$

Dann ist

$$\frac{dU}{dx} = -K(x)$$

und die DGL $(*)$ geht über in

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}$$

so daß

$$m\dot{x}\ddot{x} + \frac{dU}{dx}\dot{x} = 0$$

bzw

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U\right) = 0$$

Es folgt der <u>Energiesatz</u>

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E$$

Damit

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

wenn $U(x) \leq E$. Diese Gl hat separierte Variablen und läßt sich durch Integration lösen. Dadurch erhält man die Lsg der DGL (*).

Bsp

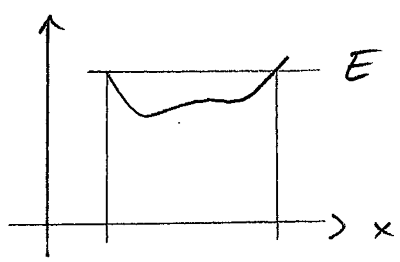
Der harmonische Oszillator genügt der DGL

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad , \qquad \omega > 0$$

Die obige Methode liefert als allgem Lsg

$$x(t) = c \sin(\omega t + \varphi)$$

Gegeben sei ein Potential $U(x)$.
Ein Teilchen mit Energie E schwingt zwischen $U(x_a)$ und $U(x_b)$ hin und her.



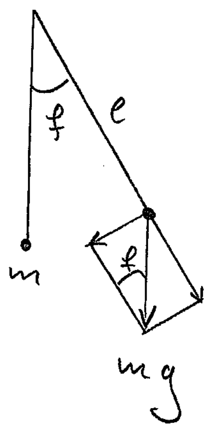
Dann ist die Schwingungsdauer durch das Integral

$$T = 2 \int_{x_a}^{x_b} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}}\, dx$$

gegeben, sofern dieses Integral existiert.

<u>Bsp</u>

Pendel



Die Masse m wird durch $-mg \sin\varphi$ beschleunigt. Also lautet die Bewegungsgl

$$m\ddot{x} = -mg\sin\varphi$$

Hierbei ist x die Bogenlänge.
Mit $x = l\varphi$ folgt

$$\underline{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$$

Für kleine Winkel φ ist $\sin\varphi \approx \varphi$ und wir erhalten die DGL

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

Dies ist die DGL des harmonischen Oszillators.
Es ist

$$\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l}\varphi^2 = \text{const}$$

Im Umkehrpkt φ_0 ist $\dot\varphi = 0$ so daß

$$\dot\varphi^2 + \frac{g}{e}\varphi^2 = \frac{g}{e}\varphi_0^2$$

Für die Schwingungsdauer gilt

$$T = 4\sqrt{\frac{e}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{e}{g}} \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{e}{g}} \left[\arcsin x\right]_0^1$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{e}{g}}$$

// 9.11.09

Für beliebige Winkel ist

$$\ddot\varphi + \frac{g}{e}\varphi \sin\varphi = 0$$

so daß

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\dot{\varphi}\sin\varphi = 0$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l}\cos\varphi\right) = 0$$

Es folgt

$$\underline{\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l}\cos\varphi = \text{const}}$$

Wie eben bez. wir die Maximalauslenkung mit φ_0. Dann ist

$$\underline{\dot{\varphi}^2 - 2\frac{g}{l}\cos\varphi = -2\frac{g}{l}\cos\varphi_0}$$

und

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{2\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$$

Die Lsg dieser DGL mit separierten Var läßt sich nicht mit elementaren Fkt ausdrücken.

Wir berechnen die Schwingungsdauer

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}$$

Wir def $k = \sin\frac{\varphi_0}{2}$ und gehen zum halben Winkel über

$$\cos\varphi = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\cos\varphi - \cos\varphi_0 = \left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) - \left(\cos^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

$$= \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} - (1 - K^2 - K^2)$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} - 1 + 2K^2$$

$$= 2\left(K^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

Also

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{4\left(K^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}}$$

Nun substituieren wir

$$K \sin\psi = \sin\frac{\varphi}{2}$$

bzw.

$$\psi = \arcsin\left(\frac{1}{K}\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

so daß

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{K^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}} \frac{1}{2K} \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4(k^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2})}} \cos\frac{\varphi}{2}$$

und

$$d\varphi = \frac{\sqrt{4(k^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2})}}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} \, d\psi$$

$$= \frac{\sqrt{4(k^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2})}}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} \, d\psi$$

Es folgt

$$\underline{T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}}$$

Dies ist ein <u>vollständiges elliptisches Integral erster Art.</u>

Für $|x| < 1$ gilt die <u>Binomialreihe</u>

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Insbesondere

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} x^n$$

weil

n Faktoren

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdot \ldots \cdot (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}$$

$$= (-1)^n \frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdot \ldots \cdot (\frac{2n-1}{2})}{n!}$$

$$= (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}$$

Durch part Int zeigt man

$$\int \sin^{2n} x \, dx = -\frac{1}{2n} \sin^{2n-1} x \cos x$$

$$+ \frac{2n-1}{2n} \int \sin^{2n-2} x \, dx$$

so daß

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x \, dx$$

$$= \underbrace{\frac{2n-1}{2n} \; \frac{2n-3}{2n-2} \; \cdots \; \frac{1}{2}}_{n \text{ Faktoren}} \; \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi}_{\frac{\pi}{2}}$$

Damit

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

$$= 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \, k^{2n} \sin^{2n} \psi \right) d\psi$$

$$= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots(2n)} K^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi \, d\varphi\right)$$

$$= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots(2n)}\right)^2 \frac{\pi}{2} K^{2n}\right)$$

(Ist $|K|<1$ so konv. die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)} K^{2n} \sin^{2n}\varphi$$

gleichmäßig für $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, so daß wir die Reihenbildung und Integration vertauschen dürfen.)

Wir fassen zusammen

Sei $k = \sin\frac{\varphi_0}{2}$ mit $|k| < 1$. Dann gilt für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\right)^2 k^{2n}\right)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots\right)$$

3.6 Der Potenzreihenansatz

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$p(x)\, y'' + q(x)\, y' + r(x)\, y = s(x)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$$

mit $\underline{p(x_0) \neq 0}$. Dann gilt

Satz

Sind p, q, r und s in $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ in Potenzreihen um x_0 entwickelbar, so ist auch die Lsg y des Anfangswertproblems in $J = (x_0 - r, x_0 + r)$ in eine Potenzreihe um x_0 entwickelbar. Die Koeff von y lassen sich durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

Bsp

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $|x| < 1$ die Binomialreihe

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Das kann man folgendermaßen zeigen:

Die Fkt $(1+x)^\alpha$ ist die eindeutig bestimmte Lsg des Anfangswertproblems

$$(1+x)\, y' - \alpha y = 0 \quad , \; y(0) = 1$$

(Die DGL $y' = \frac{\alpha}{1+x}\, y$ ist lin und homogen auf $(-1,1)$ und hat dort eine eindeutige Lsg)

Der Ansatz $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ führt auf die oben angegebene Darstellung für y in $(-1,1)$..

Die Bed $p(x_0) \neq 0$ ist wichtig, wie folgendes Bsp zeigt

$$x^2 y'' - (1+x)\, y = 0$$

p, q, r und s sind Potenzreihen um 0. Der Ansatz

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

liefert

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-2}$$

$$x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^n$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n(n-1) c_n - c_n \right) x^n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

bzw

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n(n-1) - 1 \right) c_n x^n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

Der Koeff an x^0 auf der linken Seite ist $-c_0$. Also $c_0 = 0$

Der Koeff an x^1 auf der linken Seite ist $-c_1 + c_0$. Also $c_1 = 0$

Der Koeff an x^2 auf der linken Seite ist $c_2 + c_1$. Also $c_2 = 0$.

Man sieht leicht, daß auch alle höheren c_n verschwinden.

In diesem Fall liefert der Potenzreihenansatz also nur die triviale Lsg.

Satz

Gegeben sei die DGL

$$p(x)\, y'' + q(x)\, y' + r(x)\, y = 0 \qquad (*)$$

x_0 sei eine schwache Singularität der DGL, d.h. $\underline{p(x_0) = 0}$ und

$$p(x) = (x-x_0)^2\, p_0(x)$$

$$q(x) = (x-x_0)\, p_1(x)$$

$$r(x) = p_2(x)$$

wobei die Fkt $p_i(x)$ in Potenz-reihen um x_0 entwickelbar sind und $\underline{p_0(x_0) \neq 0}$.

Sei

$$f(r) = r(r-1)\, p_0(x_0) + r\, p_1(x_0) + p_2(x_0)$$

Die Nullstellen r_1, r_2 von f seien reell und $r_1 \geq r_2$.

Dann hat $(*)$ eine Lsg

$$y = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

mit $c_0 \neq 0$. Die Koeff c_n lassen sich durch Koeffizientenvergleich bestimmen und die Reihe konv auf einer offenen Umgebung von x_0

Bsp

Die Besselsche DGL der Ordnung α

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \alpha^2) y = 0,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, spielt eine wichtige Rolle in der Physik und in der Elektrotechnik. Die DGL hat eine schwache Sing in $x_0 = 0$. Es ist

$$p_0(x) = 1$$
$$p_1(x) = 1$$
$$p_2(x) = -\alpha^2 + x^2$$

und

$$f(r) = r(r-1) + r - \alpha^2$$
$$= r^2 - \alpha^2$$

Die Nullstellen von f sind $r_{1/2} = \pm\alpha$.

Wir betrachten den Fall

$\underline{\alpha \in \mathbb{N}}$ $(= \{0, 1, 2, \dots\})$

und setzen $\alpha = m$. Dann hat die DGL eine Lsg der Form

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Es ist

$$x y' = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) c_n x^{m+n}$$

$$x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1) c_n x^{m+n}$$

Aus

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2) y = 0$$

folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big((m+n)(m+n-1) + (m+n)$$

$$- m^2 \Big) c_n x^{m+n}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{m+n+2} = 0$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2m) c_n x^{m+n}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{m+n+2} = 0$$

// 10.11.09

Koeffizienten vgl.

Der Koeff an x^m auf der linken Seite ist 0. Also ist

$$\underline{c_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

beliebig.

Der Koeff an x^{m+1} auf der linken Seite ist $(2m+1)\,c_1$. Also

$$\underline{c_1 = 0}$$

Der Koeff an x^{m+n} mit $n \geq 2$ ist

$$n(n+2m)\,c_n + c_{n-2}$$

Somit

$$\underline{c_n = -\frac{1}{n(n+2m)}\,c_{n-2}}$$

Es folgt

$$\underline{c_{2n+1} = 0}$$

für alle $n \geq 0$. Weiterhin ist

$$c_{2n} = \frac{(-1)}{2n(2n+2m)} c_{2n-2}$$

$$= \frac{(-1)}{2n(2n+2m)} \frac{(-1)}{(2n-2)(2n-2+2m)}$$

$$\cdots \frac{(-1)}{2(2+2m)} c_0$$

n Faktoren

$$= \frac{(-1)^n}{4^n n! (m+1) .. (m+n)} c_0$$

Also ist

$$y(x) = c_0 x^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n! (m+1) \ldots (m+n)} x^{2n}$$

eine Lsg der Besselschen DGL.

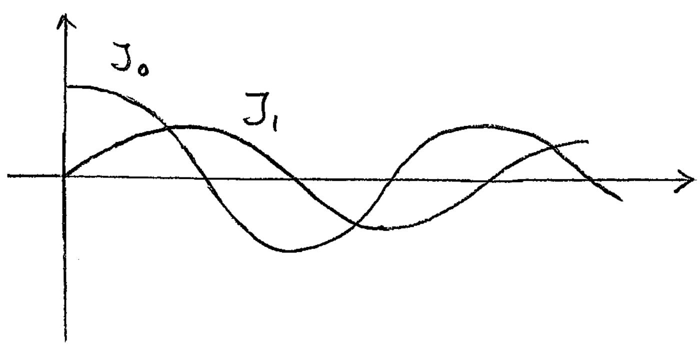
Die Reihe konv für alle $x \in \mathbb{R}$.

Mit $c_0 = \dfrac{1}{2^m m!}$ erhält man die

Lsg

$$\underline{J_m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}$$

J_m heißt Bessel-Fkt 1. Art der Ordnung m



3.7 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Wir untersuchen nun die Existenz und Eindeutigkeit von Lsg von Differentialgl erster Ordnung.

Sei $f + gy' = 0$ exakt. Wir haben bereits gesehen, daß das Anfangswertproblem

$$f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0 \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

<u>lokal eindeutig</u> lösbar ist, falls $g(x_0, y_0) \neq 0$ (vgl. 3.2)

Wir haben auch gesehen, daß das Anfangswertproblem

$$y' = f(x)\,y + g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

ein eindeutige (globale) Lsg hat (vgl. 3.4).

Existenzsatz von Peano

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, d.h. $D \neq \emptyset$, offen und zshgd, und $f: D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann geht durch jeden Pkt $(x_0, y_0) \in D$ mindestens eine Lsg der Dgl

$$y' = f(x,y)$$

Jede Lsg läßt sich nach rechts und links bis zum Rand von

D fortsetzen.

Die Stetigkeit von f reicht also um die Lösbarkeit der Dgl $y' = f(x,y)$ zu sichern. Allerdings ist die Lsg i.a. <u>nicht</u> eindeutig.

<u>Bsp</u>

Die Fkt

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto 2\sqrt{|y|}$$

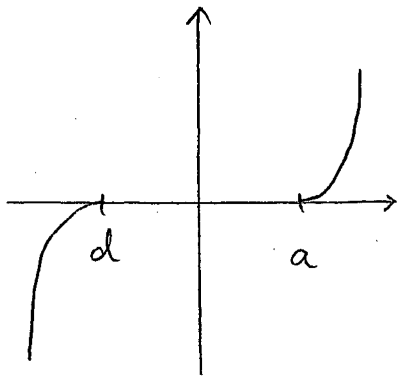
ist stetig auf $\mathbb{R}^2$. Das Anfangswertproblem

$$y' = 2\sqrt{|y|}\,, \quad y(0) = 0$$

hat mehr als eine Lsg.

Jede Kurve der Form

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & , \quad 0 \le a \le x \\ 0 & \quad d \le x \le a \\ -(x-d)^2 & , \quad x \le d \le 0 \end{cases}$$



löst das Anfangswertproblem.

Denn

$$y'(x) = \begin{cases} 2(x-a) & , \quad 0 \le a \le x \\ 0 & , \quad d \le x \le a \\ -2(x-d) & , \quad x \le d \le 0 \end{cases}$$

$$= 2\sqrt{|y|}$$

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f: G \longrightarrow \mathbb{R}$.

f erfüllt bzgl y eine Lipschitzbed,

wenn es ein $L \geq 0$ gibt, so daß

für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in G$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

f erfüllt bzgl y lokal eine Lipschitzbed, wenn es zu jedem Pkt $(x,y) \in G$ eine offene Umgebung U gibt, so daß f auf $U \cap G$ eine Lipschitzbed bzgl y erfüllt.

Bsp

1) Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto |y|$$

Dann gilt

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \big||y_1| - |y_2|\big|$$
$$\leq |y_1 - y_2|$$

d.h. f genügt auf $\mathbb{R}^2$ einer Lipschitzbed mit $L = 1$.

2) Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto y^2$$

Dann

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1^2 - y_2^2|$$

$$= |(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)|$$

$$= |y_1 + y_2|\,|y_1 - y_2|$$

Folglich erfüllt f lokal eine Lipschitzbed aber nicht global, denn $|y_1 + y_2|$ ist unbeschränkt auf $\mathbb{R}^2$.

3) Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \sqrt{|y|}$$

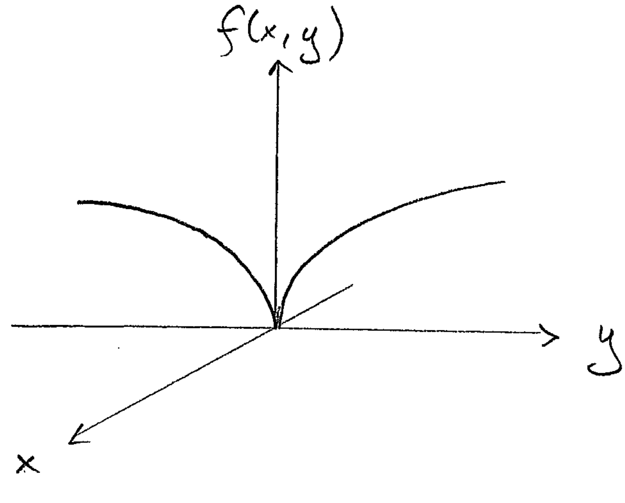
Dann ist

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |\sqrt{|y_1|} - \sqrt{|y_2|}|$$

$$= \frac{||y_1| - |y_2||}{|\sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|}|}$$

Insbesondere

$$|f(x,y) - f(x,0)| = \frac{1}{\sqrt{|y|}} |y|$$



Da $\frac{1}{\sqrt{|y|}} \xrightarrow[y \to 0]{} \infty$ genügt f entlang der Gerade $y = 0$ keiner Lipschitzbed. für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

mit $y \neq 0$ erfüllt f lokal eine Lipschitzbedingung.

<u>Satz</u>

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f: G \to \mathbb{R}$ <u>stetig</u>. Wir nehmen weiterhin an, daß $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ für alle $(x, y) \in G$ existiert und <u>stetig</u> ist. Dann genügt f <u>lokal</u> einer Lipschitzbed bzgl. y.

<u>Bew</u>

Sei $(x_0, y_0) \in G$ und K eine offene Kreisscheibe um (x_0, y_0) so daß $\bar{K}$ ganz in G liegt. Seien

$P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_1, y_2)$ Punkte in K. Dann ist die Verbindungsstrecke

$$P_1 + t(P_2 - P_1)$$
$$= (x_1, y_1) + t(0, y_2 - y_1)$$

von P_1 und P_2 in K. Die Fkt

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(x_1, y_1 + t(y_2 - y_1)) \end{aligned}$$

ist differenzierbar auf $(0,1)$ und

$$\frac{dg}{dt} = f_y (y_2 - y_1)$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (0,1)$ so daß

$$|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| = |g(0) - g(1)|$$

$$= |g'(\xi)|$$

$$= |f_y(x_1, y_1 + \xi(y_2 - y_1))| \, |y_2 - y_1|$$

$$\leq \underbrace{\sup_{(x,y) \in \overline{K}} |f_y(x,y)|}_{=: L} \, |y_1 - y_2|$$

Also genügt f auf K einer Lipschitz-bed.

$\square$

Es folgt

<u>Satz</u>

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetige Fkt mit stetiger part

Ableitung f_y. Sei $K \subset G$ ein Kompaktum (z.B. ein Quader)

Dann erfüllt f auf G eine Lipschitzbed.

<u>Satz</u>

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f: G \to \mathbb{R}$ <u>stetig</u>. Weiterhin genüge f bzgl y einer lokalen Lipschitzbed.

Dann ist das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

mit $(x_0, y_0) \in G$ <u>lokal</u> eindeutig lösbar, d.h. in einer Umgebung

$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ existiert genau eine Lsg.

// 16.11.09

Zusammen mit dem Satz von Peano folgt

Theorem

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{R}$ stetig. Weiterhin genüge f in G lokal einer Lipschitzbed in y

Dann hat für jedes $(x_0, y_0) \in G$ das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lsg $y = y(x)$, die nach links und rechts dem

Rand von D beliebig nahe kommt.

<u>**Theorem**</u>

Sei $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ y \in \mathbb{R}\}$ und $f: S \to \mathbb{R}$ <u>stetig</u>. Weiterhin genüge f einer <u>Lipschitzbed auf S</u>.

Dann gibt es zu jedem $(x_0, y_0) \in S$ genau eine auf dem <u>ganzen</u> Intervall $[a,b]$ def Lsg des Anfangswertproblems

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

<u>**Bsp**</u>

Betrachte das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 \quad , \quad y(0) = y_0 > 0$$

Dann ist $f(x,y) = y^2$ stetig auf $G = \mathbb{R}^2$.
Die Ableitung $f_y = 2y$ ist ebenfalls stetig auf $\mathbb{R}^2$, so daß f auf $\mathbb{R}^2$ lokal einer Lipschitzbed genügt.
Somit hat das Anfangswertproblem eine eindeutige Lsg die dem Rand von G beliebig nahe kommt. Wir finden die Lsg durch Sep der Variablen.

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{y} = x + \text{const}$$

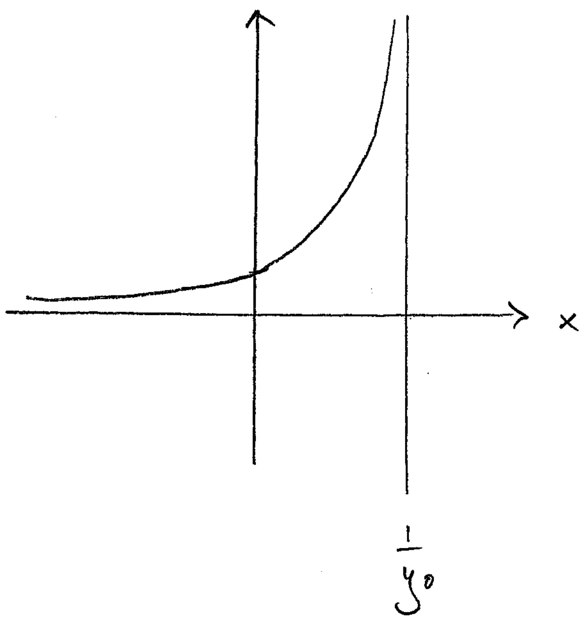
$$\underline{y = \frac{1}{c-x}}$$

Anpassung an den Anfangswert

$$y(0) = \frac{1}{c} = y_0$$

Also $c = \frac{1}{y_0}$ und

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - x} = \frac{y_0}{1 - y_0 x}$$



Die Lsg kommt dem Rand von G beliebig nahe. Sie ist nur für $x < \frac{1}{y_0}$ def. Es gibt keinen Vertikalstreifen $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ y \in \mathbb{R}\}$ auf dem $f(x,y) = y^2$ einer Lipschitz-bed genügt. Deshalb gibt es Intervalle $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ und Werte $y_0 \in \mathbb{R}$, so daß das Anfangswertproblem $y' = y^2$, $y(x_0) = y_0$ eine Lsg hat, die nicht auf dem ganzen Intervall I def ist.