3. Differentialgleichungen

Viele Vorgänge in der Natur, Technik und Gesellschaft lassen sich durch Differentialgleichungen modellieren. In diesem Kapitel untersuchen wir solche Gleichungen und beschreiben Lösungsverfahren.

3.1 Einführung

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und

$F : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$.

Eine Bestimmungsgleichung für $y = y(x)$ der Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

heißt <u>implizite gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung</u>

Hat (1) die spezielle Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \qquad (2)$$

so spricht man von einer <u>expliziten</u> gewöhnlichen Differentialgl. n-ter Ordnung.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein <u>Intervall</u>. Eine

n-mal differenzierbare Fkt

$y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt (explizite)

<u>Lösung</u> von (1) bzw (2) wenn für

alle $x \in I$

$$(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in D$$

und

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

bzw

$$(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \in G$$

und

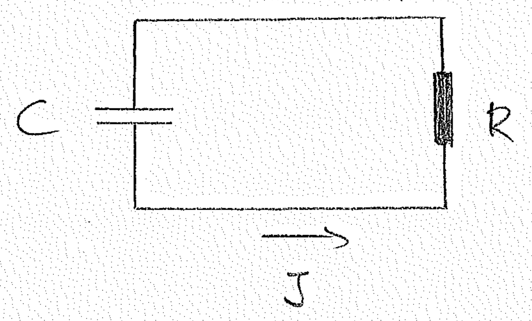
$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

gilt.

Eine Gleichung $u(x,y)=0$ mit einer stetig differenzierbaren Fkt $u: B \to \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^2$, heißt <u>implizite Lsg</u>, wenn sie über wenigstens einem Intervall eine Auflösung $y=y(x)$ besitzt, die eine explizite Lsg der DGL darstellt.

<u>Bsp</u>

1) Entladung eines Kondensators:



Aufgrund der Maschenregel ist

$$U_C + U_R = 0$$

so daß $\left(C = \frac{Q}{U} , \quad R = \frac{U}{J} \right)$

$$\frac{Q}{C} + RJ = 0$$

und

$$\frac{\dot{Q}}{C} + R\dot{J} = 0$$

Mit $\dot{Q} = J$ folgt

$$J + RC\,\dot{J} = 0$$

bzw

$$\dot{J} + \frac{1}{RC} J = 0$$

Diese Gl kann durch Separation der Variablen gelöst werden

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{RC} J$$

impliziert

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{1}{RC}\, dt$$

bzw

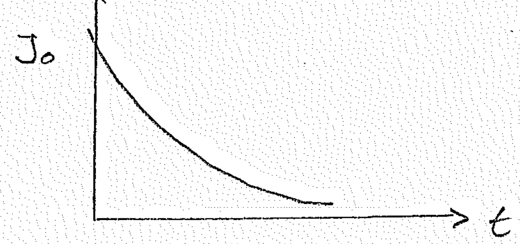
$$\int \frac{dJ}{J} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

und

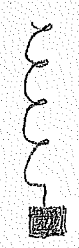
$$\ln|J| + const = -\frac{1}{RC} t$$

Also

$$\underline{J = J_0\, e^{-\frac{1}{RC} t}}$$



2) Federpendel



Nach Newton ist $F = m\ddot{x}$. Andererseits ist die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung, d.h. $F = -cx$, $c>0$. Also

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

bzw

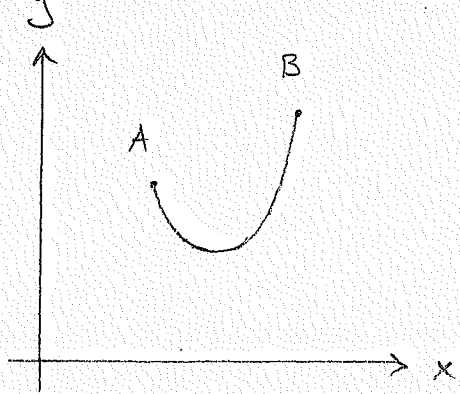
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

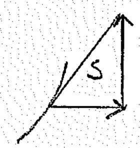
Die Lsg dieser DGL ist

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$$

3) Kettenlinie:

Ein Seil der Länge l, das zwischen 2 Punkten A und B aufgehängt ist, läßt sich folgendermaßen beschreiben:





Die Spannkraft $S = \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix}$ ist <u>tangential</u>, d.h.

$$S = \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ H y' \end{pmatrix}$$

Da das Seil im Gleichgewicht ist, ist H <u>konstant</u> und somit

$$V' = H y''$$

Der Beitrag eines Seilstücks ds zu V ist

$$dV = \frac{mg}{e} ds = \rho\, ds$$

Mit

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

folgt

$$\frac{dV}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

d.h.

$$y'' = a\sqrt{1+y'^2}$$

Die allgemeine Lsg dieser Gl ist

$$y = \frac{1}{a}\cosh(ax + c_1) + c_2$$

Diese Lsg kann man folgendermaßen finden:

Setze $z = y'$. Dann ist

$$z' = a\sqrt{1+z^2}$$

so daß

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = a\int dx$$

Das linke Integral kann man durch Substitution bestimmen.

Setze

$$z = \sinh t$$

Mit

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

$$\frac{dz}{dt} = \cosh t$$

folgt

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int dt = t$$

$$= \operatorname{arsinh} z$$

Also

$$z = \sinh(ax + c_1)$$

bzw

$$\frac{dy}{dx} = \sinh(ax + c_1)$$

und

$$\int dy = \int \sinh(ax + c_1)\, dx$$

so daß

$$y = \frac{1}{a} \cosh(ax + c_1) + c_2$$

// 27.10.09

Bei der Lösung einer DGL n-ter Ordnung erhält man i.a. n Integrationskonstanten. Diese lassen sich durch weitere Bedingungen festlegen. Ein Beispiel ist das Anfangswertproblem.

Als Anfangswertproblem bezeichnet man eine DGL n-ter Ordnung

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

oder

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

mit vorgegebenen Werten

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

mit

$$(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}(x_0))$$

im Definitionsbereich von F bzw

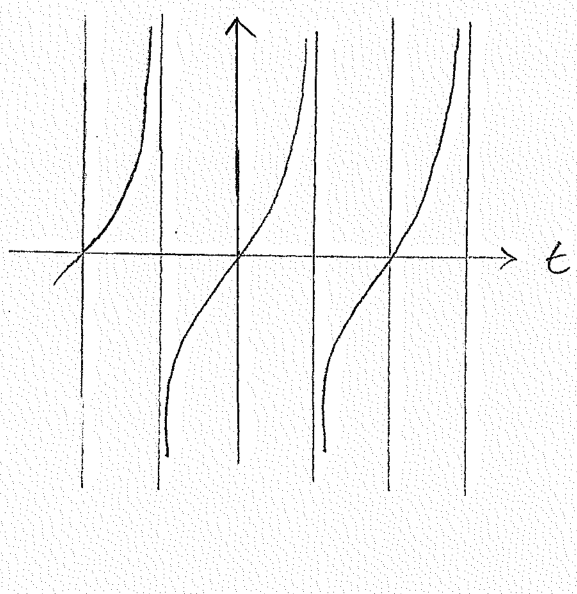
$(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$

im Definitionsbereich von f.

Die Lsg eines Anfangswertproblems existiert nicht notwendig für alle x.

Bsp

Die Gl $\dot{x} = 1 + x^2$, $x(0) = 0$ wird durch $x(t) = \tan(t)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ gelöst.



Ein Anfangswertproblem heißt *lokal lösbar*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß es auf $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ eine Lsg $y = y(x)$ der DGL mit den Anfangsbed gibt. Dieses $y(x)$ heißt *lokale Lsg*

Mit einer expliziten DGL

$$y' = f(x,y)$$

$(x,y) \in G \subset \mathbb{R}^2$, wird eine Kurve gesucht, deren Steigung in jedem Pkt durch $f(x,y)$ gegeben ist. Zeichnet man in jeden Pkt (x,y) eine kurze

Strecke mit Steigung $f(x,y)$ ein, so erhält man das sog. <u>Richtungsfeld</u>.

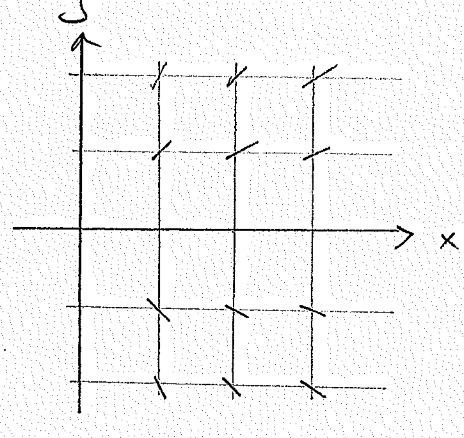
Dieses liefert einen Überblick über den Verlauf der Lösungskurven.

<u>Bsp</u>

1) Sei $G = (0,\infty) \times \mathbb{R}$ und $f(x,y) = \frac{y}{x}$, d.h.

$$y' = \frac{y}{x}$$

Dann sieht das Richtungsfeld folgendermaßen aus



Das Richtungsfeld legt nahe, daß die Lsg der Gl

$$y = ax$$

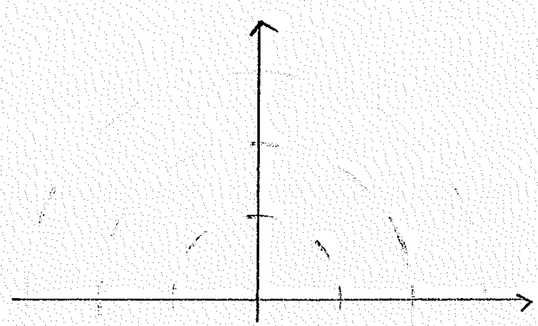
sind. Tatsächlich gilt dann

$$y' = a = \frac{y}{x}$$

2) Sei $G = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ und $f(x,y) = -\frac{x}{y}$ d.h.

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Das Richtungsfeld ist dann



Tatsächlich sind die Lg der Gl durch die Halbkreiskurven

$$y(x) = \sqrt{c^2 - x^2},$$

$c > 0$, gegeben:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{1}{2} (-2x)$$

$$= - \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}$$

$$= - \frac{x}{y}$$

Die Isohlinen der DGL

$$y' = f(x,y)$$

sind die Linien $f(x,y) = \text{const}$.

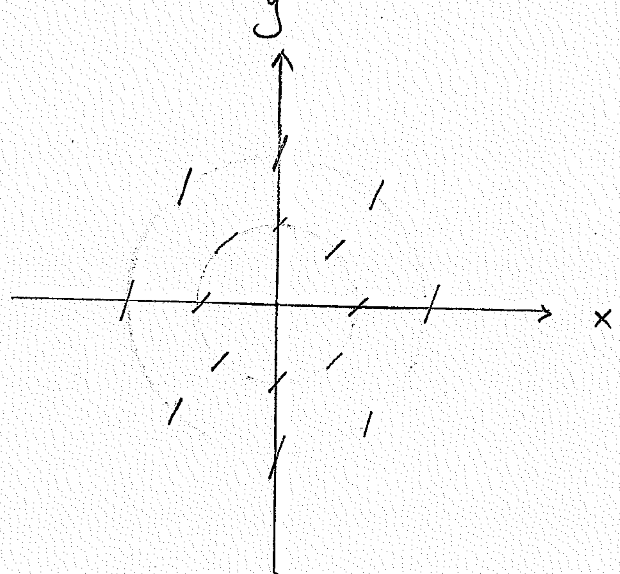
Entlang einer Isokline haben die Linienelemente alle dieselbe Steigung.

<u>Bsp</u>

Die Isoklinen der DGL

$$y' = x^2 + y^2$$

sind Kreise



3.2 Exakte Differentialgleichungen

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zshgd Gebiet und $E : G \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein statisches elektrisches Feld mit Potential U, d.h. $E = -\operatorname{grad} U$. Wir schreiben $E = \binom{P}{Q}$. Die Äquipotentiallinien von U sind gegeben durch

$$U(x,y) = \text{const}.$$

In vielen Fällen können wir annehmen, daß wir y als Fkt von x schreiben können.

Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

bzw

$$P + Q\frac{dy}{dx} = 0$$

Diese Gl liefert einen Zusammenhang zwischen den Feldkomp P und Q und den Äquipotentiallinien.

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und seien $f, g : G \to \mathbb{R}$ <u>stetig</u>. Die DGL

$$f(x,y) + g(x,y)\, y' = 0$$

heißt <u>exakt</u>, wenn es eine stetig

differenzierbare Fkt $F : G \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = f$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = g$$

In diesem Fall heißt F <u>Stammfkt</u> der exakten DGL.

<u>Satz</u>

Seien $f, g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig,

$$f + g y' = 0$$

eine exakte DGL und F eine <u>Stammfkt</u> dieser Gl. Dann gilt

1) $y = y(x)$ ist auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ genau dann eine Lsg, wenn

$F(x, y(x)) = const$ auf I

2) Für alle $(x_0, y_0) \in G$ mit $\underline{g(x_0, y_0) \neq 0}$ ist das Anfangswertproblem

$$f(x,y) + g(x,y)\, y' = 0 \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

<u>lokal eindeutig lösbar</u>

<u>Bew</u>

1) Ist $F(x, y(x)) = const$ so folgt aus der Kettenregel

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

d.h.

$$f + g y' = 0$$

Sei andersherum $f + g y' = 0$. Dann

$$\frac{d}{dx} F = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = f + g y' = 0$$

Also $F(x, y(x)) = \text{const}$.

2) Wegen $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) \neq 0$

ist $F(x,y) = F(x_0, y_0) = \text{const}$ lokal

um (x_0, y_0) auflösbar, d.h. es gibt

genau eine stetig diffb Fkt $y = y(x)$

def in einer Umgebung von x_0 mit

$F(x, y(x)) = F(x_0, y_0)$ $\square$

Satz

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und seien $f, g : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist die DGL

$$f + gy' = 0$$

genau dann exakt, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

für alle $(x,y) \in G$.

Ist

$$f + g'y = 0$$

eine exakte DGL, so kann man F durch Integration bestimmen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f$$

impliziert

$$F = \int f \, dx + C(y)$$

$C(y)$ folgt dann aus

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int f \, dx\right) + \frac{dC}{dy} = g$$

durch Integration nach y.

Die allgemeine implizite Lsg der exakten DGL ist dann $F(x,y) = \text{const}$.

Die implizite Lsg des Anfangswert-problems ist $F(x, y) = F(x_0, y_0)$

Diese Gl wird wenn möglich nach y aufgelöst.

Bem

Man kann F natürlich auch durch

$$F = \int g \, dy + C(x)$$

bestimmen.

Bsp

Betrachte das Anfangswertproblem

$$2xy + (2y + x^2) y' = 0 \quad , \quad y(0) = 1$$

Die DGL

$$\underbrace{2xy}_{f} + \underbrace{(2y + x^2)}_{g} y' = 0$$

ist exakt auf $G = \mathbb{R}^2$, weil

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Also

$$F = \int 2xy \, dx + C(y)$$

$$= x^2 y + C(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + \frac{dC}{dy} = 2y + x^2$$

Dann

$$\frac{dc}{dy} = 2y$$

$$c = y^2$$

Damit lautet die Stammfkt

$$F(x,y) = x^2 y + y^2$$

und die allgemeine Lsg der exakten DGL ist

$$F(x,y) = x^2 y + y^2 = \text{const}$$

// 2.11.09

Das Anfangswertproblem wird implizit durch

$$F(x,y) = F(0,1)$$

d.h.

$$x^2 y + y^2 = 1$$

gelöst. Wir lösen die Gl nach y auf.

$$y^2 + x^2 y - 1 = 0$$

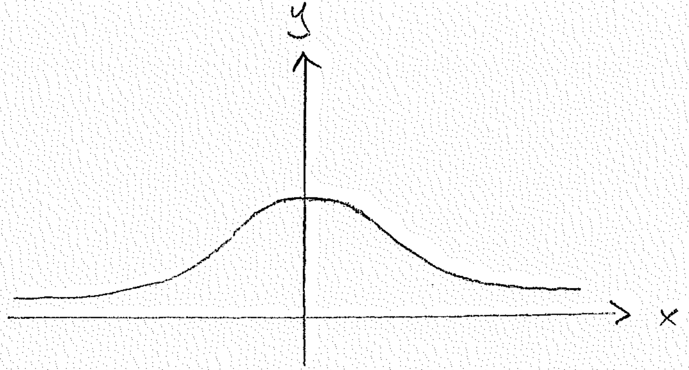
$$y_{1/2} = -\frac{x^2}{2} \pm \sqrt{\frac{x^4}{4} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x^2 \pm \sqrt{x^4 + 4}\right)$$

Falls $y = \frac{1}{2}\left(-x^2 - \sqrt{x^4+4}\right)$ so ist $y(x) < 0$ für alle x. Das Anfangswertproblem mit $y(0) = 1$ wird also durch

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^4+4} - x^2\right)$$

gelöst



Die Differentialgleichung

$$y + 2x y' = 0 \qquad (*)$$

ist <u>nicht</u> exakt. Durch Multiplikation mit dem Faktor $1/\sqrt{x}$ wird sie in dem Gebiet $x > 0$ exakt.

$$\frac{y}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}\, y' = 0$$

Eine Stammfkt lautet

$$F(x,y) = 2y\sqrt{x}$$

$(x > 0)$

Auch durch Multiplikation mit y erhält man aus $(*)$ eine exakte

Differentialgleichung

$$y^2 + 2xyy' = 0$$

mit $F(x,y) = xy^2$.

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und seien $f, g : G \to \mathbb{R}$ stetig. Eine stetige Fkt $M : G \to \mathbb{R}$ mit $M(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in G$ heißt <u>integrierender Faktor</u> oder <u>Eulerscher Multiplikator</u> der DGL

$$f(x,y) + g(x,y)\, y' = 0 \qquad (1)$$

wenn

$$M(x,y)\,g(x,y) + M(x,y)\,f(x,y)\,y' = 0 \qquad (2)$$

exakt ist.

Bem

Da $M(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in G$ haben (1) und (2) dieselben Lsg

Aus dem obigen Satz folgt sofort

Satz

Ist G einfach zshgd Gebiet und sind $f, g, M \in C^1(G, \mathbb{R})$, so ist M genau dann ein Eulerscher Multiplikator wenn

$$(Mf)_y = (Mg)_x$$

bzw

$$M_y f + M f_y = M_x g + M g_x$$

gilt.

<u>Bsp</u>

Betrachte

$$\underbrace{y}_{f} + \underbrace{x(2xy-1)}_{g} y' = 0$$

Dann ist

$$f_y = 1$$

$$g_x = (2xy-1) + x2y = 4xy-1$$

d.h. die DGL ist nicht exakt. Der Euler Multiplikator müßte erfüllen

$$M_y f + M f_y = M_x g + M g_x$$

d.h.

$$M_y y + M = M_x x(2xy-1) + M(4xy-1)$$

bzw.

$$M(4xy-2) = M_y y - M_x x(2xy-1)$$

Für $2xy-1 \neq 0$ folgt

$$M = \frac{y}{2(2xy-1)} M_y - \frac{x}{2} M_x$$

Der Ansatz

$$M = M(x)$$

ist naheliegend

Dann ist

$$M = -\frac{x}{2} \frac{dM}{dx}$$

und

$$\int \frac{dM}{M} = -2 \int \frac{dx}{x}$$

Also

$$\ln M = -2 \ln x + \text{const}$$

und

$$\underline{M = \frac{c}{x^2}}$$

$M = \frac{1}{x^2}$ ist ein Euler Multiplikator

für $x > 0$ oder $x < 0$.

$$\frac{y}{x^2} + \frac{2xy - 1}{x} y' = 0$$

ist exakt für $x<0$ oder $x>0$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{x^2}$$

impliziert

$$F = -\frac{y}{x} + c(y)$$

Dann

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{x} + \frac{dc}{dy} = 2y - \frac{1}{x}$$

so daß

$$\frac{dc}{dy} = 2y$$

und

$$c = y^2$$

Die allgem implizite Lsg ist also

$$F(x,y) = y^2 - \frac{y}{x} = \text{const}$$

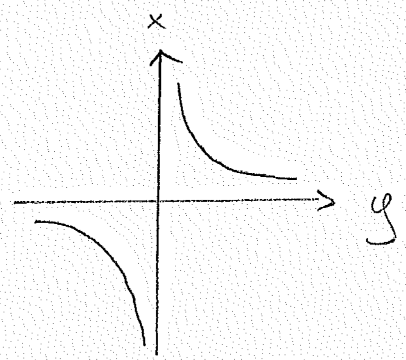
Es ist hier günstiger y erst als Fkt von x aufzufassen. Dann

$$x = \frac{y}{y^2 - c}$$

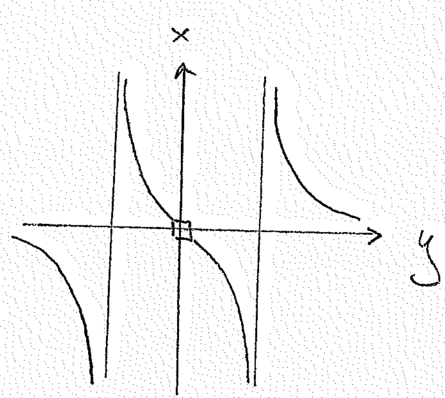
<u>$c = 0$</u>

$$x = \frac{1}{y}$$

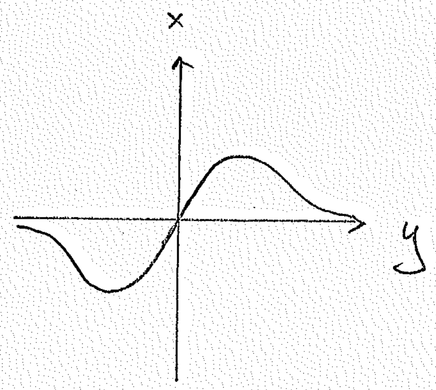
Eine weitere Lsg hier ist $y(x) = 0$



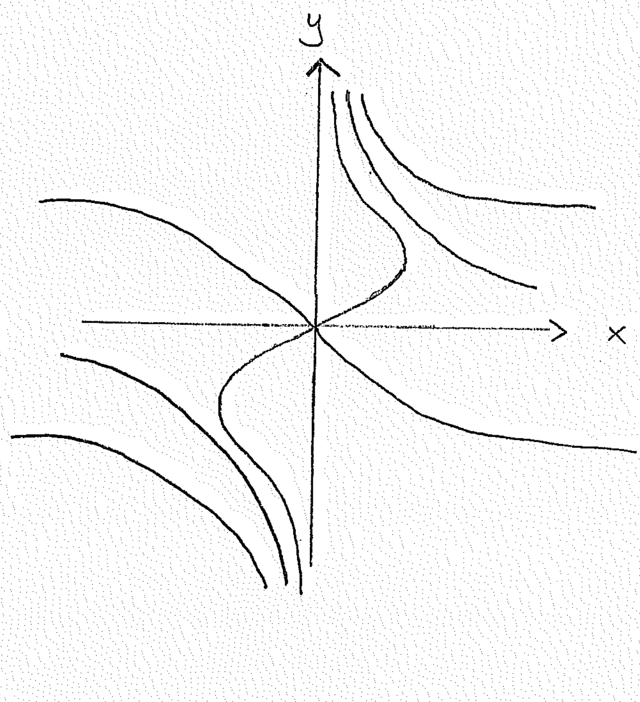
<u>$c > 0$</u>



$\underline{c < 0}$



Zeichnet man die Äquipotential-
linien in ein Diagramm so
erhält man



3.3 Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Seien I, J Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine Differentialgl der Form

$$y' = f(x)\, g(y)$$

bezeichnet man als DGL mit getrennten Variablen.

Ist $g(y) \neq 0$ auf J so folgt

$$f(x) - \frac{1}{g(y)}\, y' = 0$$

Diese DGL ist exakt und hat

die Stammfkt

$$F(x,y) = \int f(x)\,dx - \int \frac{1}{g(y)}\,dy$$

Durch Auflösen der Gl $F(x,y) = \text{const}$ nach y erhält man die allgemeine Lsg der DGL.

Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für exakte DGL folgt sofort

<u>Satz</u>

Seien I, J Intervalle auf $\mathbb{R}$,

$f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ stetig,

$x_0 \in I$, $y_0 \in J$ und $g(y_0) \neq 0$. Dann ist das Anfangswertproblem

$$y' = f(x)\,g(y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

lokal eindeutig lösbar.

Wir erhalten die Lsg durch Trennung der Variablen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

impliziert

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

Auflösung nach y liefert die allg

Lsg.

<u>Bsp</u>

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 1$$

Hier ist $f(x) = -x$ und $g(y) = \frac{1}{y}$.
Die Voraussetzungen des letzten Satzes sind mit $I = \mathbb{R}$ und $J = (0, \infty)$ erfüllt.

$$\int y \, dy = - \int x \, dx$$

impliziert

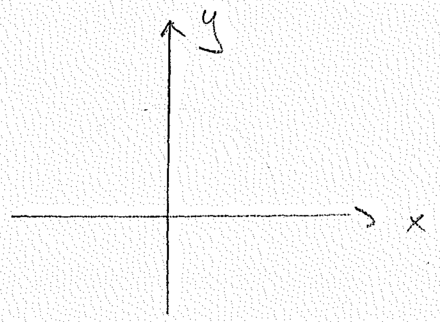
$$\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} x^2 = \text{const}$$

bzw

$$x^2 + y^2 = c$$

Die Anfangsbed $y(0) = 1$ führt auf $c = 1$ und

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$



3.4 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Fkt. Dann heißt die DGL

$$y' = f(x) y + g(x)$$

lineare DGL erster Ordnung.

Ist $g(x) = 0$ für alle $x \in I$, so heißt die DGL <u>homogen</u>, andernfalls <u>inhomogen</u>.

<u>Satz</u>

Die allgem Lsg $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ der homogenen DGL

$$y = f(x)\, y'$$

ist gegeben durch

$$y(x) = C\, e^{a(x)}$$

mit

$$a(x) = \int f(x)\, dx$$

Das zugehörige Anfangswertproblem

$$y' = f(x)\,y\,, \quad y(x_0) = y_0$$

mit $x_0 \in I$, y_0 beliebig hat genau eine Lsg.

<u>Bew</u>

Sei $a(x) = \int f(x)\,dx$ eine Stammfkt von f auf I (hier geht die Stetigkeit von f ein) und

$$z(x) = c\,e^{a(x)}$$

Dann ist

$$z'(x) = c\,a'(x)\,e^{a(x)}$$
$$= f(x)\,z(x)$$

d.h. z löst die homogene DGL.

Sei $y(x)$ eine weitere Lsg der DGL.

Dann ist

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{y'z - yz'}{z^2} = \frac{fyz - yfz}{z^2}$$

$$= 0$$

Also

$$\frac{y}{z} = \text{const}$$

Das Anfangswertproblem läßt sich eindeutig lösen weil

$$y(x_0) = c\,e^{a(x_0)} = y_0$$

genau eine Lsg c hat $\square$

// 3.11.09

Bem

Man erhält die Lsg der homogenen DGL auch durch Trennung der Variablen.

Die Differenz zweier Lsg der inhomogenen DGL

$$y' = f(x)\,y + g(x) \qquad (*)$$

ist eine Lsg der homogenen DGL

$$y' = f(x)\,y$$

Wir erhalten somit die allgem. Lsg der inhomogenen DGL indem wir eine beliebige partikuläre Lsg

y_p der inhomogenen DGL bestimmen und dazu die allgemeine Lsg y_h der homogenen DGL addieren.

Eine partikuläre Lsg y_p findet man z.B. durch <u>Variation der Konstanten</u>. Wir machen den Ansatz

$$y_p(x) = C(x)\, e^{a(x)}$$

Dann ist

$$y_p'(x) = C'(x)\, e^{a(x)} + C(x)\, a'(x)\, e^{a(x)}$$
$$= C'(x)\, e^{a(x)} + f(x)\, y_p(x)$$

$y_p(x)$ ist eine Lsg der inhomogenen

DGL, wenn

$$c'(x)\, e^{a(x)} = g(x)$$

bzw

$$c(x) = \int g(x)\, e^{-a(x)}\, dx$$

Bem

In einigen Fällen, z.B. wenn f konstant ist, kann es einfacher sein, wenn man einen geeigneten Ansatz für y_p macht.

Satz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien

$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die allgemeine Lsg der lin DGL

$$y' = f(x)y + g(x)$$

der Form

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

wobei y_h die allgem Lsg der homogenen Gl und y_p eine bel Lsg der inhomogenen Gl ist.

y_h ist gegeben durch

$$y_h(x) = C e^{a(x)}$$

mit

$$a(x) = \int f(x)\, dx$$

Eine partikuläre Lsg y_p kann durch Variation der Konstanten gefunden werden.

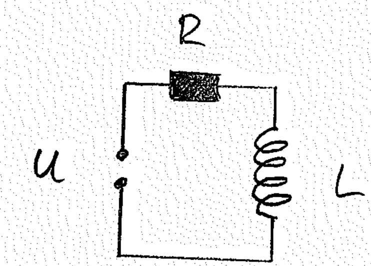
Das Anfangswertproblem

$$y' = f(x)y + g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

mit $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ hat genau eine Lsg auf I.

Bsp

RL - Stromkreis



$$U = U_R + U_L$$
$$= RI + L\dot{I}$$

$$\underline{L\dot{I} + RI = U}$$

homogene Gl

$u = 0$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I$$

$$\int \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int dt$$

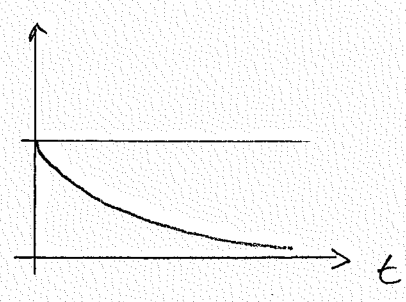
$$\ln |I| = -\frac{R}{L} t + \text{const}$$

$$I = c\, e^{-\frac{R}{L} t}$$

Die Lsg der homogenen Gl

$L\dot{I} + RI = 0$ mit $I(0) = I_0$ lautet

$$I(t) = I_0\, e^{-\frac{R}{L} t}$$



inhomogene Gl

1) $U(t) = U_0$

Ein partikuläre Lsg der inhomog. Gl ist

$$I_p = const = \frac{U_0}{R}$$

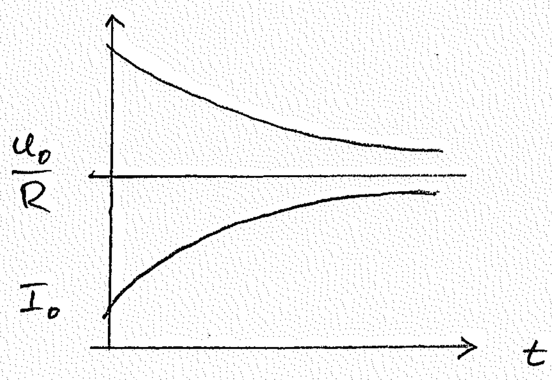
Dann ist

$$I = I_p + I_h$$

$$= \frac{U_0}{R} + C e^{-\frac{R}{L}t}$$

Setzen wir $I(0) = I_0$ so folgt

$$I(t) = \frac{U_0}{R} + \left(I_0 - \frac{U_0}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t}$$



$$\lim_{t \to \infty} I(t) = \frac{U_0}{R} = I_p$$

$$\lim_{t \to \infty} I_h(t) = 0$$

2) $\underline{U(t) = U_0 \cos \omega t}$

$$I_h(t) = c\, e^{-\frac{R}{L} t}$$

Ansatz für $I_p(t)$

$$I_p(t) = c(t)\, e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$\dot{I}_p(t) = \dot{c}\, e^{-\frac{R}{L} t} + c\, e^{-\frac{R}{L} t} \left(-\frac{R}{L}\right)$$

$$= e^{-\frac{R}{L} t} \left(\dot{c} - \frac{R}{L} c\right)$$

Aus

$$L\dot{I}_p + RI_p = u$$

folgt

$$e^{-\frac{R}{L}t}(L\dot{c} - Rc) + Rce^{-\frac{R}{L}t} = u$$

bzw

$$e^{-\frac{R}{L}t}\dot{c} = \frac{u_0}{L}\cos\omega t$$

und

$$c = \int dc = \frac{u_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t\, dt$$

Durch 2-malige part Int zeigt man

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left\{ b\sin bx + a\cos bx \right\}$$

Damit

$$c = \frac{u_0}{L} \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} \left\{ \omega \sin \omega t + \frac{R}{L} \cos \omega t \right\}$$

$$= u_0 R \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{R^2 + L^2 \omega^2} \left\{ \cos \omega t + \frac{\omega L}{R} \sin \omega t \right\}$$

Es gilt

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$= \cos y \left(\cos x + \tan y \sin x \right)$$

so daß

$$\cos x + \tan y \sin x = \frac{1}{\cos y} \cos(x-y)$$

Für

$$\tan y = \frac{\omega L}{R}$$

bzw

$$y = \arctan \frac{\omega L}{R} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

ist

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2L^2}{R^2}}}$$

Also

$$c = U_0 R \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{R^2+\omega^2L^2} \sqrt{1+\frac{\omega^2L^2}{R^2}} \cos(\omega t-\varphi)$$

$$= \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} e^{\frac{R}{L}t} \cos(\omega t-\varphi)$$

mit

$$\varphi = \arctan\frac{\omega L}{R}$$

Eine partikuläre Lsg ist also

$$\underline{I_p(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \cos(\omega t-\varphi)}$$

$$\underline{\varphi = \arctan\frac{\omega L}{R}}$$