2. Die Integralsätze von Gauss und Stokes

In diesem Kapitel formulieren wir die Integralsätze von Gauss und Stokes. Beide Sätze sind fundamental in der Mathematik und in der Physik. Sie lassen sich aus dem allgemeinen Stokesschen Integralsatz ableiten.

2.1 Die Divergenz eines Vektorfeldes und der Satz von Gauß

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Def

$$(\operatorname{div} F)(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\xi)$$

Dann heißt die Fkt

$$\operatorname{div} F : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Divergenz von F.

$\operatorname{div} F(\xi)$ beschreibt die Quelldichte

von F in ξ.

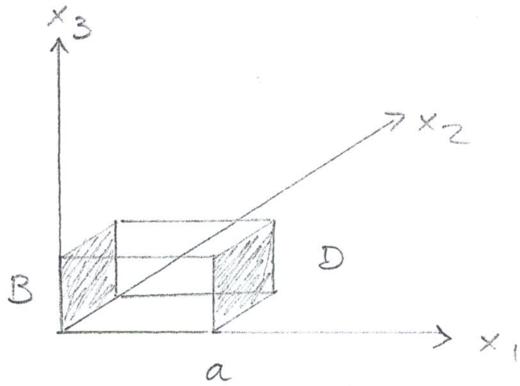
// 14.10.09

Sei $Q \subset \mathbb{R}^3$ ein Quader, H ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung von $\bar{Q}$ und N das nach außen weisende Einheitsnormalenvektorfeld auf Q. Dann

$$\iint_{\partial Q} H N \, d\sigma = \iiint_{Q} \operatorname{div} H \, dx$$

Dies ist der Gaußsche Integralsatz für Quader.

Die Aussage kann man wie folgt beweisen.



Betrachte das Feld

$$H = \begin{pmatrix} H_1(x_1, x_2, x_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial H_1}{\partial x_1}$$

Es gilt

$$\iiint_Q \operatorname{div} H \, dx$$

$$= \iiint_Q \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

$$= \iint_B \left(\int_0^a \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \, dx_1 \right) dx_2 \, dx_3$$

$$= \iint_B \left(H_1(a, x_2, x_3) - H_1(0, x_2, x_3) \right) dx_2 \, dx_3$$

Andererseits gilt

$$\iint_{\partial Q} H N \, d\sigma$$

$$= - \iint_B H_1(0, x_2, x_3) \, dx_2 \, dx_3 + \iint_B H_1(a, x_2, x_3) \, dx_2 \, dx_3$$

Also in diesem Fall

$$\iiint\limits_{Q} \operatorname{div} H \, dx = \iint\limits_{\partial Q} H N \, d\sigma$$

Ein analoges Resultat gilt für Felder der Form $H = \begin{pmatrix} 0 \\ H_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw $H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_3 \end{pmatrix}$. Aus der Linearität der Integrale folgt dann, daß die Aussage für beliebige $H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}$ gilt.

Sei beispielsweise v das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen

Flüssigkeit. Dann ist die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit aus dem Quader heraus-fließt, gerade

$$\iint\limits_{\partial Q} v N \, d\sigma$$

Diese ist gleich dem Volumenintegral über die Divergenz von v.

$$\iiint\limits_{Q} \operatorname{div} v \, dx$$

Die Divergenz beschreibt also die Quellen und Senken des Feldes bzw Flüssigkeitsstroms.

Allgemein gilt

<u>Theorem</u> (Gaußscher Integralsatz)

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ kompakt mit nicht-leerem Inneren $B \setminus \partial B$. Der Rand ∂B sei die Vereinigung von endlich vielen Flächen, die sich höchstens in Randpunkten treffen. Weiterhin sei ∂B orientierbar und N das nach außen weisende stetige Einheitsnormalenvektorfeld. Sei H ein auf einer offenen Umgebung von B def

stetig differenzierbares Vektor-
feld. Dann gilt

$$\iiint_B \operatorname{div} H \, dx = \iint_{\partial B} H N \, d\sigma$$

Bew

Wir approximieren B durch eine
Vereinigung von Quadern und
wenden das vorher bewiesene
Resultat für Quader an. Die
Flächenintegrale über die Zwischen-
wände heben sich weg, da die
zugehörigen Normalenvektoren

entgegengesetzt gerichtet sind.

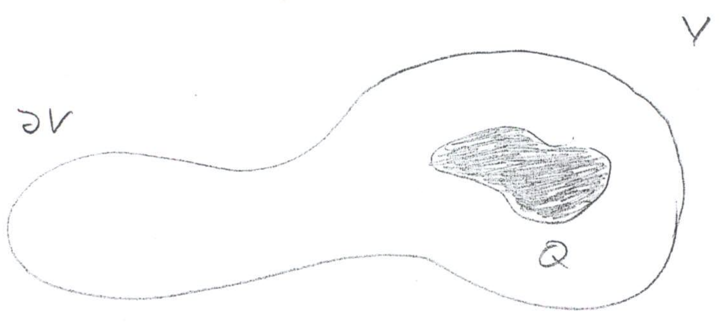
$\square$

<u>Bsp</u>

1) Es gilt die Maxwellgl

$$\operatorname{div} D = \varrho$$

Sei V ein Volumen im $\mathbb{R}^3$, das die Bedingungen des Gaußschen Integralsatzes erfüllt und eine Ladung Q mit lokaler Ladungsdichte ϱ umschließt



Dann ist $D = \varepsilon_0 E$ und

(D elektr. Flußdichte, E elektr. Feldstärke)

$$\iint_{\partial V} E N \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} E \, dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \, dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

Die Ladung ist also die Quelle des elektrischen Feldes.

2) Die Maxwell gl

$$\operatorname{div} B = 0$$

(B magnetische Flußdichte,
H magnetische Feldstärke)

besagt, daß es keine magnetischen Monopole gibt.

3) Man kann mit Hilfe des Satzes auch das Volumen einer Kugel berechnen. Betrachte das Vektorfeld

$$H = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

auf einer Kugel K um den Ursprung mit Radius r. Dann ist

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = 3$$

und

$$\iint_{\partial K} H N \, d\sigma^2 = r \iint_{\partial K} N^2 \, d\sigma = 4 \pi r^3$$

$$\shortparallel$$

$$\iiint_K \operatorname{div} H \, dx = 3 V$$

Also ist das Volumen der Kugel

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Aus dem Satz von Gauß läßt sich leicht eine Formel für die part

Integration gewinnen.

<u>Satz</u> (Part Int im $\mathbb{R}^3$)

Sei B eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, die den Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes genügt. Seien f, g stetig differenzierbare reellwertige Fkt, die auf einer offenen Umgebung von B def sind, und sei $N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$ das stetige nach außen weisende Einheitsnormalenvektorfeld.

Dann gilt

$$\iiint_B f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx = - \iiint_B \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx + \iint_{\partial B} f g N_i \, d\sigma$$

für $i = 1, 2, 3$.

<u>Bew</u>

Sei z.B. $i = 1$. Def F durch

$$F = \begin{pmatrix} fg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial (fg)}{\partial x_1} = f \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} g$$

und der Satz von Gauß liefert

$$\iiint_B \operatorname{div} F \, dx = \iiint_B \left(f \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} g \right) dx$$

$$\|$$

$$\iint_{\partial B} F N \, d\sigma = \iint_{\partial B} fg N_1 \, d\sigma$$

Damit folgt die Beh für $i=1$.
Der Bew für $i=2,3$ ist analog.

□

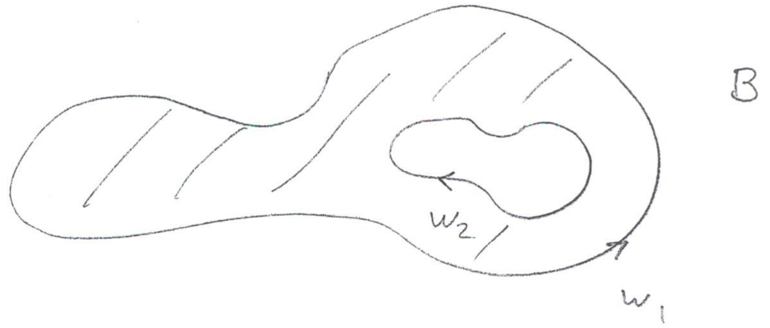
Der Satz von Gauß gilt mit entsprechenden Definitionen auch im $\mathbb{R}^n$.

Der Satz von Gauß im $\mathbb{R}^2$ läßt sich aus dem Satz von Gauß im $\mathbb{R}^3$ ableiten. In diesem Fall wird der Satz auch als Greenscher Integralsatz bez.

<u>Satz</u> (Greenscher Integralsatz)

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit nicht-leerem Inneren $B \setminus \partial B$. Der Rand ∂B bestehe aus endl. vielen stückweise stetig differenzierbaren Kurven. Diese seien so parametrisiert, daß B stets links zur Durchlaufrichtung liegt. Sei v ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf B. Dann gilt

$$\int_{\partial B} v\, dx = \iint_B \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1\, dx_2$$



Zum Abschluß formulieren wir Rechenregeln für die Divergenz.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und seien $F, G : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und $\rho : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann

$$\operatorname{div}(F + G) = \operatorname{div}(F) + \operatorname{div}(G)$$

$$\operatorname{div}(\lambda F) = \lambda \operatorname{div}(F) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{div}(\rho F) = \rho \operatorname{div} F + (\operatorname{grad} \rho) \cdot F$$

2.2 Die Rotation eines Vektorfeldes und der Satz von Stokes

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Für $\xi \in D$ def

$$(\operatorname{rot} F)(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\xi) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\xi) \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\xi) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\xi) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\xi) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\xi) \end{pmatrix}$$

Das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} F : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

heißt <u>Rotation</u> von F.

// 20.10.09

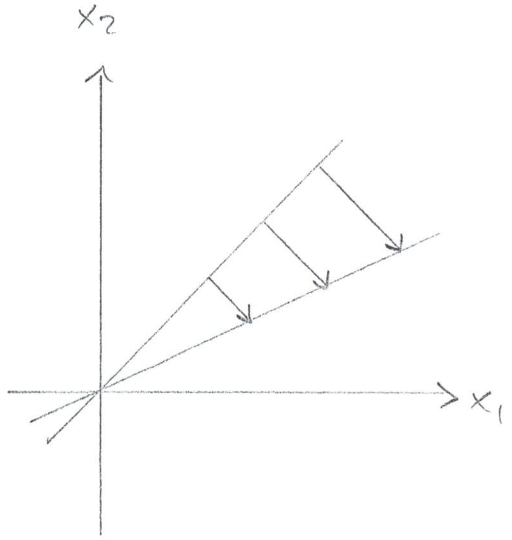
Anschaulich beschreibt die Rotation wie ein Vektorfeld um einen Punkt zirkuliert.

<u>Bsp</u>

1) Das Vektorfeld

$$v(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \omega x_2 \\ -\omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Rotation um die x_3-Achse mit konst Winkelgeschwindigkeit ω



Es ist

$$\operatorname{rot} v = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}$$

2) Das radialsymmetrische Feld

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

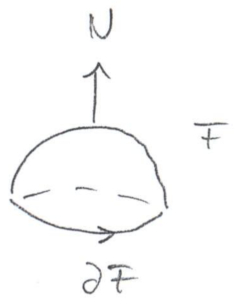
hat

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Theorem</u> (Satz von Stokes)

Sei F eine Fläche mit stückweise stetig differenzierbarem <u>geschlossenem</u> Rand ∂F. Dieser sei so parametrisiert, daß das Einheitsnormalenvektorfeld N positiv umlaufen wird. Sei H ein stetig differenzierbares Vektorfeld def auf einer offenen Umgebung von F. Dann gilt

$$\iint\limits_F \operatorname{rot} H \, N \, d\sigma = \int\limits_{\partial F} H \, dx$$



Bew

Der Satz kann durch die Betrachtung kleiner Flächenstücke bewiesen werden. Die Idee ist, daß die Beiträge an den Zwischenwänden sich gegenseitig wegheben

Alternativ kann der Satz mit dem Greenschen Integralsatz bewiesen werden.

Sei F eine Fläche mit Parameterbereich D. Wir nehmen an, daß F 2-mal stetig differenzierbar ist, und parametrisieren ∂D mit einer stückweise stetig diff'b Fkt

$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Die Komposition

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 , \quad t \longmapsto \gamma(\alpha(t))$

parametrisiert den Rand ∂F.

Zuerst nehmen wir an, daß H folgende Form hat

$$H = \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\int_{\partial F} H\, dy = \int_a^b P(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_1(t)\, dt$$

$$= \int_a^b P(F(\alpha(t)))\, (F_1 \circ \alpha)'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b P(F(\alpha(t))) \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\alpha(t))\, \dot{\alpha}_1(t) + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\alpha(t))\, \dot{\alpha}_2(t) \right\} dt$$

$$= \int_a^b P(F(\alpha(t)))\, \frac{\partial F_1}{\partial x}(\alpha(t))\, \dot{\alpha}(t)\, dt$$

$$= \int_\alpha (P \circ F)\, \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dx$$

$$= \int_{\partial D} (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x} \, dx$$

$$\underset{\uparrow}{=} \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(P \circ F \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(P \circ F \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right) \right\} dx_1 \, dx_2$$

Greenscher
Satz

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(P \circ F \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(P \circ F \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right)$$

$$= \frac{\partial (P \circ F)}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + (P \circ F) \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$- \frac{\partial (P \circ F)}{\partial x_2} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - (P \circ F) \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_1}$$

$$= \frac{\partial (P \circ F)}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial (P \circ F)}{\partial x_2} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(P\circ F_1) = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\partial P}{\partial y_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}} + \frac{\partial P}{\partial y_2}\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial y_3}\frac{\partial F_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(P\circ F_1) = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\partial P}{\partial y_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_2}} + \frac{\partial P}{\partial y_2}\frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial y_3}\frac{\partial F_3}{\partial x_2}$$

(die Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ sind x_1, x_2 und in $\mathbb{R}^3$ y_1, y_2, y_3)

folgt

$$\frac{\partial(P\circ F)}{\partial x_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial(P\circ F)}{\partial x_2}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y_2}\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial y_3}\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_2}$$

$$- \frac{\partial P}{\partial y_2}\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial y_3}\frac{\partial F_3}{\partial x_2}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y_2} \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right)}_{-N_3 \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|}$$

$$+ \frac{\partial P}{\partial y_3} \underbrace{\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right)}_{N_2 \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|}$$

$$= \left(- \frac{\partial P}{\partial y_2} N_3 + \frac{\partial P}{\partial y_3} N_2 \right) \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|$$

$$= (\operatorname{rot} H) N \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|$$

weil

$$N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|} \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

$$= \frac{1}{\left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$\int_{\partial F} H \, dy = \iint_D (\operatorname{rot} H) \, N \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right| dx_1 \, dx_2$$

$$= \iint_F (\operatorname{rot} H) \, N \, d\sigma$$

Analog verfährt man für Felder der Form

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}$$

Die Linearität der Integrale liefert dann

$$\iint_F \operatorname{rot} H \, N \, do = \int_{\partial F} H \, dy$$

für beliebige H.

Das beweist den Stokeschen Satz unter den beschriebenen Annahmen.

$\square$

Bem

1) Das Resultat gilt auch für geeignete Vereinigungen von endl. vielen Flächen.

2) Aus dem Satz von Stokes folgt, daß der Wirbelfluß durch eine geschlossene Fläche verschwindet.

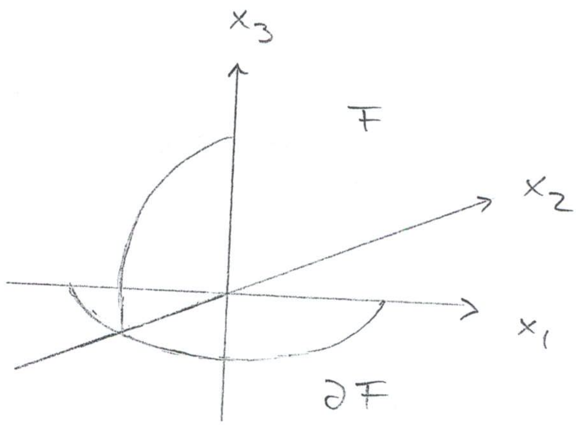
Bsp

1) Sei $D = [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $r > 0$ und $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(u,v) = \begin{pmatrix} r\cos u \cos v \\ r \sin u \cos v \\ r \sin v \end{pmatrix}$$

Dann beschreibt F eine Halb-Kugel mit Radius r

(F ist nicht injektiv im Rand von D)



∂F ist ein Kreis in der $x_1 x_2$-Ebene um den Ursprung mit

Radius r.

Sei $H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\operatorname{rot} H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir verifizieren die Aussage des Satzes von Stokes.

Wir parametrisieren ∂F durch

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\int_{\partial F} H\,dx = \int_0^{2\pi} H(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r^2 \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1}\,dt$$

$$= 2\pi r^2$$

Andererseits ist

$$(\operatorname{rot} H)\,N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$$

$$= 2 \sin v$$

und

$$\left| \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right| = r^2 \cos v$$

so daß

$$\iint_F (\operatorname{rot} H) N \, d\sigma$$

$$= \iint_D (\operatorname{rot} H) N \left| \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right| du \, dv$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 2 r^2 \sin v \cos v \, du \, dv$$

$$= 2\pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin v \cos v \, dv$$

$$= 2\pi r^2 \left[\sin^2 v \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r^2$$

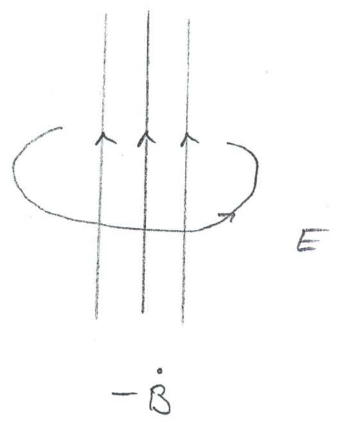
Also

$$\int_{\partial F} H\,dx = \iint_F (\operatorname{rot} H)\, N\, do$$

2) Das Induktionsgesetz besagt

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

d.h. eine zeitliche Änderung des magnetischen Flusses bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld.

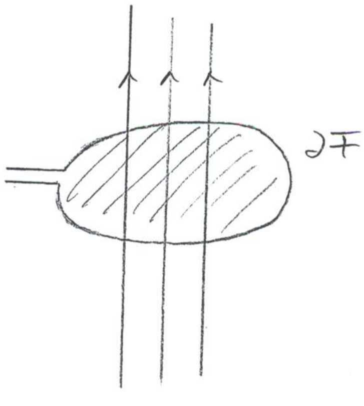


Der Stokesche Satz liefert

$$\int\limits_{\partial F} E\,dx = \iint\limits_{F} \operatorname{rot} E\, N\, d\sigma$$

$$= - \iint\limits_{F} \frac{\partial B}{\partial t}\, N\, d\sigma$$

Die linke Seite kann man als Spannung U mit einer Leiter-schleife messen



// 21.10.09

2.3 Der allgemeine Stokesche Integralsatz

Der allgemeine Stokesche Integralsatz besagt

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $M \subseteq U$ eine orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit ($k \geq 2$) und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form in U. Dann gilt für jedes Kompaktum $A \subset M$ mit glattem Rand

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega$$

wobei ∂A die induzierte Orientierung trägt.

Aus diesem Satz lassen sich die oben beschriebenen Sätze von Gauss und Stokes ableiten.

2.4 Differentialoperatoren

Wir def den Nabla-Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F: D \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\varphi : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

<u>Satz</u>

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und seien

$$F : D \to \mathbb{R}^3$$
$$\varphi : D \to \mathbb{R}$$

2-mal stetig differenzierbar. Dann ist

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$$

Bew

Wir zeigen nur die zweite Beh. Es ist

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial 2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \end{pmatrix}$$

Nach dem Satz von Schwarz gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}$$

etc

Also $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$.

$\square$

Seien $F, G : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ stetig diffb Vektorfelder und $f, \varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diffb Skalarfelder. Dann gelten die folgenden Produktformeln

$$\operatorname{grad}(f\varphi) = f \operatorname{grad}\varphi + (\operatorname{grad} f)\,\varphi$$

$$\operatorname{div}(f F) = (\operatorname{grad} f)\, F + f \operatorname{div} F$$

$$\operatorname{rot}(f F) = f \operatorname{rot} F + (\operatorname{grad} \varphi) \times F$$

$$\operatorname{div}(F \times G) = G \operatorname{rot} F - F \operatorname{rot} G$$

2.5 Gradientenfelder

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. v heißt <u>Gradientenfeld</u>, wenn es ein stetig differenzierbares Skalarfeld $f : D \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$v = \operatorname{grad}(f)$$

In diesem Fall heißt $u = -f$ ein <u>Potential</u> von v.

Sei $v : D \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Gradientenfeld. Dann ist v <u>rotationsfrei</u>, d.h.

$$\operatorname{rot} v = 0$$

Wir werden sehen, daß unter bestimmten Bed auch die Umkehrung gilt.

Eine Teilmenge G des $\mathbb{R}^n$ heißt <u>Gebiet</u>, wenn G offen und zusammenhängend ist.

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>einfach zusammenhängend</u>, wenn sich jede geschlossene Kurve in G auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

<u>Bsp</u>

1) $\mathbb{R}^2$ ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet

2) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist ein Gebiet, aber nicht einfach zshgd

3) $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist ein einfach zshgd Gebiet.

4) Entfernt man aus dem $\mathbb{R}^3$ eine Gerade, so erhält man ein Gebiet, das nicht einfach zusammenhängend ist.

Ist v ein Gradientenfeld auf einem Gebiet G, so unterscheiden sich die Potentiale von v nur um Konstanten.

Sind A, B Punkte in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$, so lassen sich A und B durch einen stückweise stetig diff'b Weg verbinden.

Die Bedeutung von Gradienten-feldern liegt in folgendem Satz

Satz

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld mit $v = \operatorname{grad} f$. Sei γ stückweise stetig diff'b Weg in G von A nach B. Dann ist

$$\int_\gamma v\,dx = f(B) - f(A)$$

Bew

Wir nehmen an, daß γ stetig differenzierbar ist. Also

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

mit $\quad f(a) = A\,,\ f(b) = B$

$$\int_\gamma v\,dx = \int_a^b v(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt$$

$$= \int_a^b (\operatorname{grad} f)(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\big(f(\gamma(t))\big)\,dt$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

$$= f(B) - f(A)\,.$$

Hieraus folgt auch die allgemeine Behauptung.

$\square$

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $K : G \to \mathbb{R}^3$ ein Kraftfeld. Bewegt man einen Körper in diesem Kraftfeld auf einem Weg γ, so leistet man die Arbeit

$$W = - \int_\gamma K \, dx$$

Das Kraftfeld K wird als <u>konservativ</u> bezeichnet, wenn K ein Gradientenfeld ist bzw ein Potential hat. In dem Fall hängt W nur vom Anfangs- und Endpkt von φ ab.

Bsp

Die Zentralkraft

$$K(x) = c\,\frac{x}{|x|^3}$$

$(x \neq 0)$ ist konservativ und hat das Potential $U(x) = \frac{c}{|x|}$.

Das impliziert insbesondere, daß das Gravitationsfeld der Erde und das elektrische Feld einer geladenen Kugel konservativ ist.

Weiterhin gilt in konservativen Kraftfeldern der Energiesatz

Denn

$$m \ddot{x} = K = -\operatorname{grad} U$$

impliziert

$$m \ddot{x} \dot{x} + \dot{x} \operatorname{grad} U = 0$$

und $(U = U(x))$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U\right) = 0$$

d.h.

$$\underline{\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U = \text{const}}$$

Der folgende Satz beschreibt die Existenz von Potentialen

Theorem

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $v : G \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf G. Dann:

v ist ein Gradientenfeld genau dann wenn $\operatorname{rot} v = 0$.

Bem

1) Die Aussage ist falsch, wenn G nicht einfach zusammenhängend ist.

Sei $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 0\}$

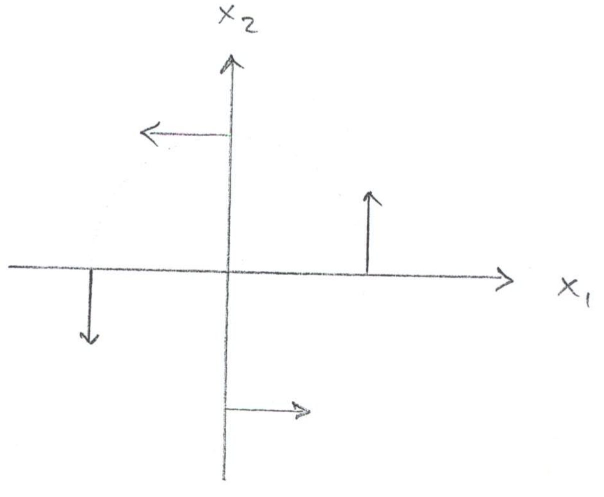
Dann ist G ein nicht einfach zshgd Gebiet im $\mathbb{R}^3$ und

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt ein rotationsfreies Wirbelfeld um die x_3-Achse, i.e.

$$(\operatorname{rot} F)(x) = 0$$

für alle $x \in G$.



// 26.10.09

Sei $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ der radiale Abstand zur z-Achse. Dann ist

$|F(x)| = \frac{1}{r}$, d.h. F fällt mit $\frac{1}{r}$ ab.

F ist <u>kein</u> Gradientenfeld. Denn

Sei $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Kreis in der $x_1 x_2$-Ebene um den Ursprung mit Radius a. Dann

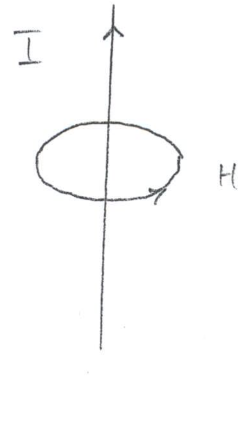
$$\int_\gamma F dx = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2} \left(a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t \right) dt$$

$$= 2\pi \neq 0$$

2) Betrachte einen unendlich langen Leiter in x_3-Richtung, durch den ein Strom I fließt. Der Leiter wird von einem radialsym Feld H umgeben.



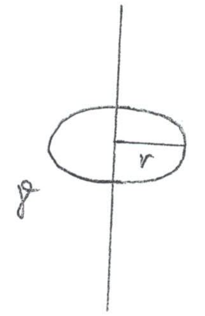
Das Durchflutungsgesetz besagt

$$\operatorname{rot} H = j + \frac{\partial D}{\partial t}$$

Hier ist $\frac{\partial D}{\partial t} = 0$ so daß

$$\operatorname{rot} H = j$$

Sei γ ein Kreis um den Leiter, der orthogonal zum Leiter ist und seinen Mittelpunkt im Leiter hat.



γ habe Radius r. Nach dem Satz

von Stokes ist

$$\iint_F \operatorname{rot} H \, N \, do = \iint_F j \, N \, do = I$$

$$\parallel$$

$$\int_\gamma H \, dx = 2\pi r \, |H|$$

d.h.

$$|H| = \frac{1}{2\pi r}$$

H fällt also mit $\frac{1}{r}$ ab. Damit ist H eindeutig festgelegt

$$H = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Rotation von H verschwindet in jedem Punkt des $\mathbb{R}^3$ verschieden von der x_3-Achse.

Allgemein ist

$$(\operatorname{rot} H)(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta(x_1)\,\delta(x_2)\, I \end{pmatrix}$$