1. Oberflächenintegrale

In diesem Kapitel def wir Integrale über gekrümmte Flächen im $\mathbb{R}^3$.

1.1 Flächen, Tangenten und Normalen

Sei D eine kompakte Jordan-meßbare Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, die D enthält. Eine Fläche F mit Parameterbereich D ist die Einschränkung $F|_D$ einer stetig differenzierbaren Fkt

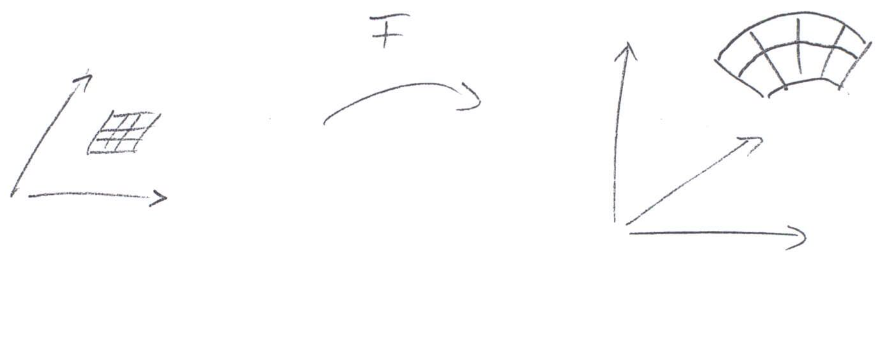
$$F : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

mit

1) $F|_D$ ist injektiv

2) $\operatorname{rang} F'(\xi) = 2$ für alle $\xi \in D$.

Die Bildmenge $F(D)$ wird als <u>Flächenstück</u> mit <u>Parametrisierung</u> F und <u>Parameterbereich</u> D bez.



<u>Bem</u>

1) Ein Flächenstück kann

verschiedene Parametrisierungen haben.

2) Da $F|_D$ injektiv ist, hat das Flächenstück $F(D)$ keine Selbstdurchschneidungen

3) Sei $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$. Dann bedeutet die Rangbed

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\xi) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\xi) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\xi) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\xi) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\xi) & \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\xi) \end{pmatrix} = 2$$

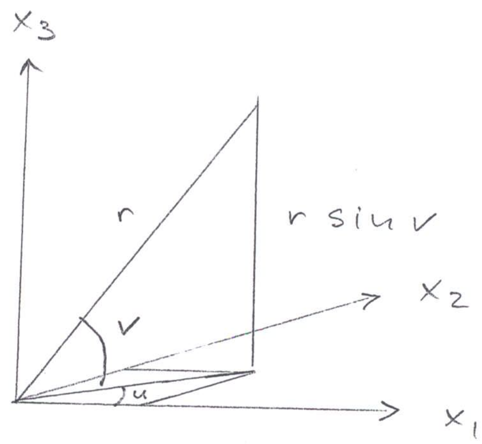
für alle $\xi \in D$.

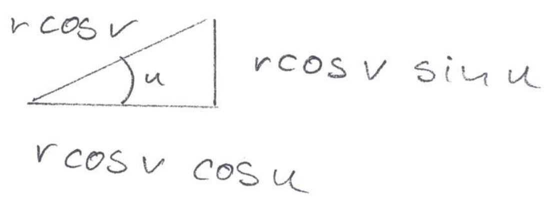
Beispiele

1) Sei $M = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $r > 0$.

Def

$$F(u,v) = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \sin u \cos v \\ r \sin v \end{pmatrix}$$





$$F'(u,v) = \begin{pmatrix} -r\sin u\cos v & -r\cos u\sin v \\ r\cos u\cos v & -r\sin u\sin v \\ 0 & r\cos u \end{pmatrix}$$

hat Rang 2 für alle $(u,v) \in M$.

F ist die Oberfläche einer Kugel um 0 mit Radius r (ohne den Halbkreis def durch $u=0$).

2) Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ offen und $g: M \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Def

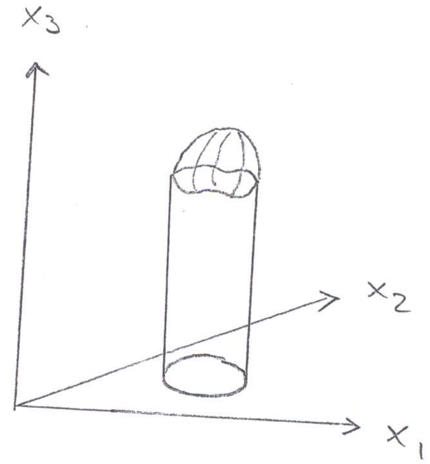
$$F: M \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ g(x_1,x_2) \end{pmatrix}$$

Dann hat

$$F'(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(\xi_2) \end{pmatrix}$$

Rang 2 und F ist der Graph von g



Sei F eine Fläche mit Parameterbereich D und $\alpha : [a, b] \longrightarrow D$ ein stetig differenzierbarer Weg.

Dann ist

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto F(\alpha(t))$$

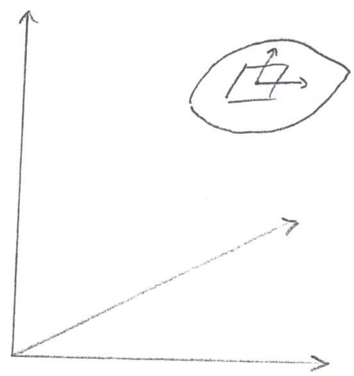
ein stetig differenzierbarer Weg in $F(D)$. Die Tangente an γ in $t_0 \in [a,b]$ ist gegeben durch

$$\dot{\gamma}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t_0) \\ \dot{\gamma}_2(t_0) \\ \dot{\gamma}_3(t_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\alpha(t_0))\,\dot{\alpha}_1(t_0) + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\alpha(t_0))\,\dot{\alpha}_2(t_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\alpha(t_0))\,\dot{\alpha}_1(t_0) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\alpha(t_0))\,\dot{\alpha}_2(t_0) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\alpha(t_0))\,\dot{\alpha}_1(t_0) + \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\alpha(t_0))\,\dot{\alpha}_2(t_0) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_1}(\alpha(t_0))\,\dot{\alpha}_1(t_0) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\alpha(t_0))\,\dot{\alpha}_2(t_0)$$

Die Rangbedingung besagt, daß die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial x_1}(\alpha(t_0))$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}(\alpha(t_0))$ lin unabh sind. Sie spannen die <u>Tangentialebene</u> von $F(D)$ in $\alpha(t_0)$ auf.



Für $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in D$ ist die <u>Tangentialebene</u> von F in $F(\xi)$ gegeben durch

$$\left\{ F(\xi) + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_1}(\xi) + \mu \frac{\partial F}{\partial x_2}(\xi) \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Der <u>Normalenvektor</u> in $F(\xi)$ ist def durch

$$N(\xi) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(\xi) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(\xi)}{\left| \frac{\partial F}{\partial x_1}(\xi) \times \frac{\partial F}{\partial x_2}(\xi) \right|}$$

Die Tangentialebene von $F(D)$ in $P = F(\xi)$ ist <u>eindeutig</u>, d.h. <u>unabhängig</u> von der gewählten Parametrisierung. Der Normalenvektor in $P = F(\xi)$ ist eindeutig bis auf ein <u>Vorzeichen</u>.

Beispiele

1) Sei

$$F(u,v) = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \sin u \cos v \\ r \sin v \end{pmatrix}$$

wie oben die Parametrisierung einer Kugel. Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ r \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} -r \cos u \sin v \\ -r \sin u \sin v \\ r \cos v \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} r^2 \cos u \cos^2 v \\ r^2 \sin u \cos^2 v \\ r^2 \sin^2 u \sin v \cos v \\ + r^2 \cos^2 u \sin v \cos v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r^2 \cos u \cos^2 v \\ r^2 \sin u \cos^2 v \\ r^2 \sin v \cos v \end{pmatrix}$$

$$= r^2 \cos v \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right| = r^2 \cos v$$

so daß

$$N(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \quad \cos v \\ \sin u \quad \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$$

Dieses Ergebnis kann man auch ohne Rechnung erhalten.

2) Sei wie oben

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ g(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

so daß

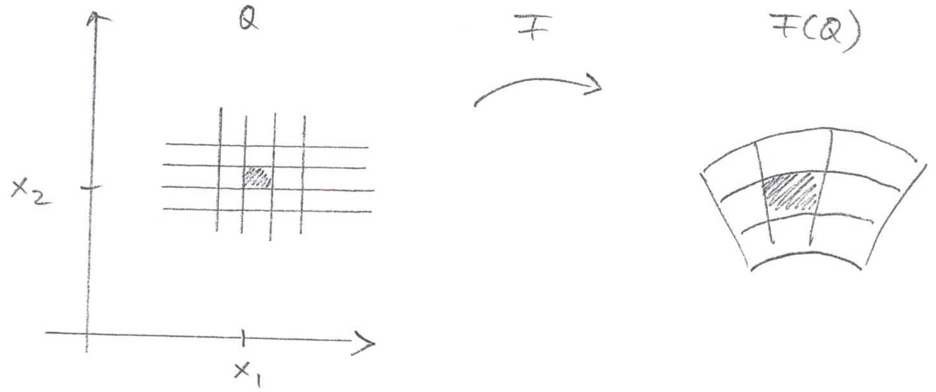
$$N(x_1, x_2) = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_2} \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2}}$$

//

13.10.09

1.2 Flächenintegrale

Sei F eine Fläche mit Parameterbereich D. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß wir D in kleine Rechtecke zerlegen können

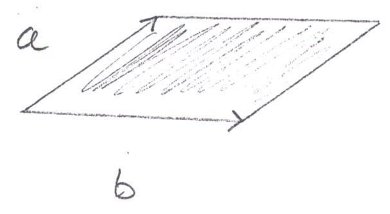


F(Q) ist ungefähr gleich dem Parallelogramm aufgespannt von

$$F(x_1+\Delta x_1, x_2) - F(x_1, x_2) \approx \frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta x_1$$

$$F(x_1, x_2+\Delta x_2) - F(x_1, x_2) \approx \frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta x_2$$

Das Parallelogramm



hat Flächeninhalt

$$|a \times b|$$

Somit hat $F(Q)$ ungefähr den Flächeninhalt

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right| \Delta x_1 \, \Delta x_2$$

Folgende Def ist also naheliegend.

Sei F eine Fläche mit Parameterbereich D. Dann ist der <u>Flächeninhalt</u> von F def als

$$\int_F d\sigma = \iint_D \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right| dx_1 \, dx_2$$

Mit Hilfe der Substitutionsregel zeigt man, daß der Flächeninhalt von F sich nicht unter Parameterwechseln mit pos oder neg Funktionaldeterminante ändert. In diesem Sinne ist der Flächeninhalt unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

Beispiele

1) Die Oberfläche einer Kugel mit Radius r ist gegeben durch

$$\int_F d\sigma = \iint_D r^2 \cos v \, du \, dv$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv \, du$$

$$= 2\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv$$

$$= 2\pi r^2 \left[\sin v \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4\pi r^2$$

2) Der Flächeninhalt des Graphen von $g(x_1, x_2)$ ist gegeben durch

$$\int_F d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2} \, dx_1 \, dx_2$$

Sei $\mathcal{F}$ eine Fläche mit Parameterbereich D und $G : \mathcal{F}(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarfeld auf $\mathcal{F}(D)$.

Dann heißt

$$\int_{\mathcal{F}} G \, do = \iint_D G(\mathcal{F}(x_1, x_2)) \left| \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_2} \right| dx_1 \, dx_2$$

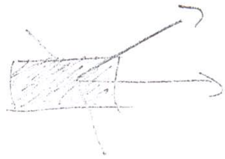
das <u>Oberflächenintegral</u> von G über $\mathcal{F}$.

Dieses Integral ändert seinen Wert nicht unter zulässigen Parametertransformationen.

Sei F eine Fläche mit Parameterbereich D. Wir nehmen an, daß $F(D)$ von einer inkompressiblen Flüssigkeit mit stationärem, d.h. zeitunabhängigem Geschwindigkeitsfeld, durchströmt wird.

Dann ist das Volumen, welches das Flächenstück $F(Q)$ pro

Zeiteinheit durchströmt, gegeben durch



Fläche von $F(Q)$ $\cdot$ Projektion von v auf N

d.h.

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right| dx_1 dx_2 \quad \cdot \quad vN$$

Also ist das Volumen V, das die Fläche F(D) durchströmt

$$\iint_D \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right| N v \, dx_1 \, dx_2$$

$$= \iint \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) v \, dx_1 \, dx_2$$

Folgende Def ist damit nahe-liegend

Sei F eine Fläche mit Parameterbereich D und $H : F(D) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Der <u>Fluß von H durch F</u> ist

ist gegeben durch

$$\int_F H \cdot do$$

$$= \iint_D H(F(x_1, x_2)) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) dx_1 \, dx_2$$

$$= \iint_D H(F(x_1,x_2)) \cdot N(x_1,x_2) \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right| dx_1 \, dx_2$$

<u>Bem</u>

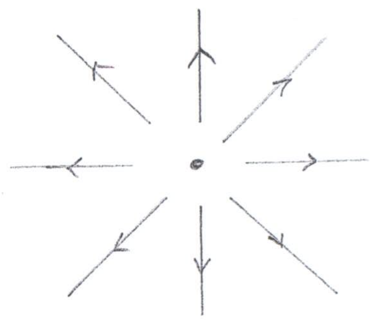
1) Der Fluß von H durch F ist gleich dem Oberflächenintegral des Skalarfeldes HN über F.

2) Da der Normalenvektor bei Parameterwechsel sein Vorzeichen ändern kann, gilt dies auch für den Fluß von H durch F.

Bsp

Das elektrische Feld einer Punktladung q ist gegeben durch

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q\, \frac{x}{|x|^3}$$



Sei F die Sphäre um q mit

Radius r. Dann ist der Fluß

von E durch F

$$\int_F E \cdot d\omega = \iint_D E(F(u,v))\, N(u,v)$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right| du\, dv$$

$$= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} q \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^2} r^2 \cos v$$

$$dv\, du$$

$$= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} q \quad 4\pi$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

weil E und N dieselbe Richtung

haben, so daß

$$E \cdot N = |E| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{1}{r^2}$$

Mit Hilfe des Integralsatzes von Gauss und der Maxwellgl $\operatorname{div} D = \varrho$ läßt sich eine entsprechende Aussage unter viel allgemeineren Bed beweisen.