23 Laurentreihen und Residuen

23.1 Laurentreihen

Ist eine Funktion f in einem Punkt z_0 nicht holomorph (oder nicht einmal definiert), so läßt sich f nicht durch eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 darstellen. Mitunter hat man als Ersatz aber eine Darstellung von f als Laurentreihe.

Definition 23.1 *Eine unendliche Reihe der Form*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \tag{23.1}$$

heißt Laurentreihe *mit Entwicklungspunkt z_0, und die Reihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \textit{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

heißen der Nebenteil *bzw. der* Hauptteil *der Laurentreihe. Man sagt, dass eine Laurentreihe im Punkt $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn sowohl ihr Haupt- und ihr Nebenteil in diesem Punkt konvergieren.*

Wie sieht das typische Konvergenzgebiet einer Laurentreihe aus? Der Nebenteil ist eine gewöhnliche Potenzreihe. Für ihn gibt es also ein $R \geq 0$ (den Konvergenzradius) so, dass er auf der offenen Kreisscheibe

$$B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$$

konvergiert. Den Hauptteil schreiben wir als

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n \quad \text{mit} \quad w = \frac{1}{z-z_0}.$$

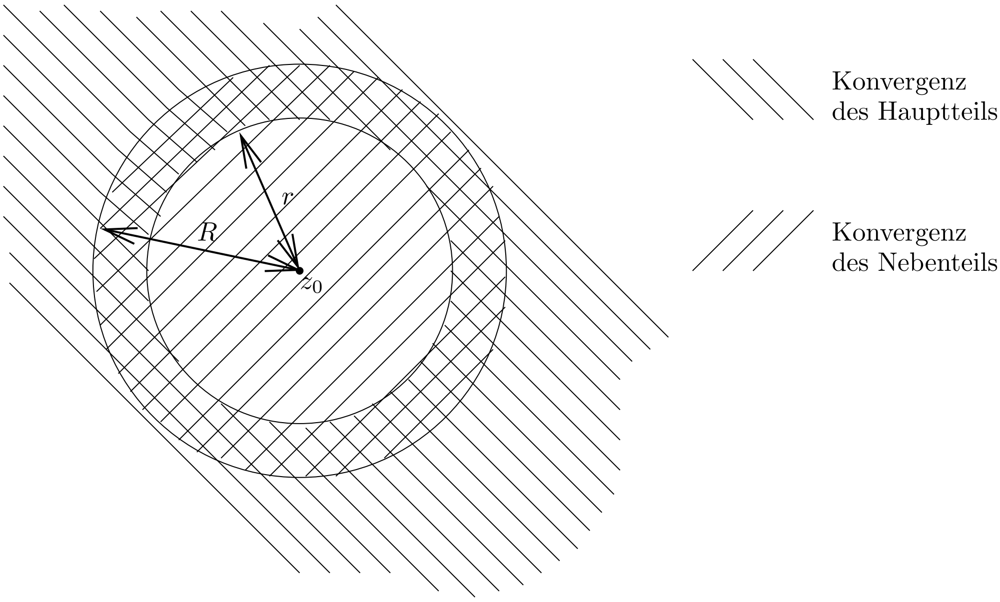
Der Konvergenzradius dieser Reihe sei ρ. Ist $\rho > 0$, so konvergiert der Hauptteil für

$$|w| < \rho \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{|z-z_0|} < \rho \quad \text{bzw.} \quad |z-z_0| > \frac{1}{\rho}.$$

Der Hauptteil konvergiert also auf $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| > r\}$ mit $r = \frac{1}{\rho}$, d.h. auf dem Außengebiet einer Kreisscheibe. Damit ist klar, dass im Falle $r < R$ die Laurentreihe (23.1) auf dem Kreisring

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$$

konvergiert (in einigen Punkten des Randes dieses Kreisrings kann ebenfalls Konvergenz vorliegen).



Umgekehrt kann man tatsächlich jede auf einem Kreisring holomorphe Funktion in eine Laurentreihe entwickeln.

Satz 23.2 (Entwicklungssatz von Laurent) *Die Funktion f sei auf dem Ringgebiet $K_{r,R}(z_0)$ mit $0 \le r < R \le \infty$ holomorph. Dann läßt sich f auf diesem Gebiet in eine (eindeutig bestimmte) Laurentreihe*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \tag{23.2}$$

entwickeln. Diese konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge von $K_{r,R}(z_0)$ gleichmäßig. Für die Koeffizienten gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{23.3}$$

wobei $\rho \in (r,R)$ beliebig gewählt werden kann (man beachte unsere Vereinbarung, wonach die Kreislinie $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_0| = \rho\}$ im Gegenuhrzeigersinn orientiert ist).

Der Beweis benutzt das Entwicklungslemma 22.6 und den Entwicklungssatz 22.7. Wir wollen uns lediglich die Formel (23.3) für die *Laurentkoeffizienten* a_n überlegen. Diese leiten wir aus der Reihenentwicklung (23.2) ab. Für $\rho \in (r,R)$ konvergiert

$$(z-z_0)^{-n-1}f(z) = \sum_{m=-1}^{-\infty} a_{m+n+1}(z-z_0)^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+n+1}(z-z_0)^m$$

auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ gleichmäßig. Gliedweises Integrieren dieser Reihe ist daher erlaubt, und wir erhalten

$$\int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = a_n \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 2\pi i a_n,$$

da die Integrale über alle übrigen Summanden verschwinden (vgl. Beispiel 1 aus Abschnitt 22.1). ■

Die Bestimmung einer Laurentreihe mit Formel (23.3) ist oft schwierig. Man versucht daher, Laurentreihen aus bekannten Reihen zu gewinnen.

Beispiel 1 Die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ist auf $\mathbb{C}$ mit Ausnahme der Punkte 1 und 2 holomorph. Sie läßt sich also auf $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ in eine „gewöhnliche“ Potenzreihe (Taylorreihe) entwickeln und auf $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ sowie $D_3 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ in Laurentreihen.

Die Partialbruchzerlegung von f ist $f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$, und für die Summanden $\frac{1}{z-1}$ und $\frac{1}{z-2}$ finden wir mit der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} &&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n && \text{für } |z| < 1,\\
\frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(z/2)} &&= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n && \text{für } |z| < 2,\\
\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} &&= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} && \text{für } |z| > 1,\\
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-(2/z)} &&= \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{z^n} && \text{für } |z| > 2.
\end{aligned}$$

■

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n &&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n && \text{auf } D_1,\\
f(z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n &&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n && \text{auf } D_2,\\
f(z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{z^n} &&= \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1) z^{-n} &&\\
&= \sum_{n=-2}^{-\infty} (2^{-n-1} - 1) z^n &&&& \text{auf } D_3.
\end{aligned}$$

■

23.2 Isolierte Singularitäten

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, U Umgebung von z_0, und f sei eine auf $U \backslash \{z_0\}$ definierte und dort holomorphe Funktion. Dann heißt z_0 eine *isolierte Singularität* von z_0. Die Funktion f kann in jedem Kreisring $K_{0,R}(z_0)$, der ganz in U liegt, in eine Laurentreihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Man klassifiziert isolierte Singularitäten nach dem Verhalten des Hauptteiles dieser Laurentreihe.

Definition 23.3 a) *z_0 heißt* hebbare Singularität, *wenn alle Laurentkoeffizienten im Hauptteil der Laurentreihe (d.h. alle a_n mit $n \leq -1$) verschwinden.*

b) *z_0 heißt* Pol, *wenn z_0 keine hebbare Singularität ist, aber nur endlich viele Koeffizienten des Hauptteiles ungleich Null sind. Ist $a_{-m} \neq 0$, aber $a_{-n} = 0$ für alle $n > m$, so heißt z_0* Pol der Ordnung *m.*

c) *Ist z_0 weder hebbare Singularität noch Pol, so heißt z_0* wesentliche Singularität. *In diesem Fall sind also unendlich viele der Koeffizienten des Hauptteiles der Laurentreihe ungleich Null.*

Beispiel 2 Für jede der Funktionen $f(z) = \frac{\sin z}{z}, g(z) = \frac{1}{z^2(z-1)(z-2)}, h(z) = e^{1/z}$ ist $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität. Im ersten Fall ist diese hebbar, da

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$$

die Laurententwicklung von f ist und der Hauptteil gleich 0 ist. Aus Beispiel 1 wissen wir weiter, dass

$$g(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n = \frac{1}{2}\, z^{-2} + \frac{3}{4} z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+3}}\right) z^n$$

auf $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. Also ist $z_0 = 0$ ein Pol 2. Ordnung von g. Schließlich ist

$$h(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^{-n}$$

die Laurententwicklung von h in $\mathbb{C} \backslash \{0\}$. In diesem Fall ist $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität. ■

Wir sehen uns kurz das Verhalten einer holomorphen Funktion f in der Nähe einer isolierten Singularität z_0 an. Ist z_0 eine *hebbare Singularität*, so kann f auf einer punktierten Kreisscheibe $B\backslash\{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ in eine Laurentreihe mit Hauptteil 0 entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Die Potenzreihe auf der rechten Seite konvergiert auch für $z = z_0$, und zwar gegen a_0. Es liegt daher nahe, den Wert von f in z_0 mit a_0 festzusetzen. Die so abgeänderte Funktion ist dann auf ganz $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ holomorph; die Singularität ist "behoben".
Ist z_0 ein *Pol m. Ordnung* von f, so konvergiert die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

in einer punktierten Kreisscheibe $B\backslash\{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$. Die Funktion

$$g(z) := (z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{m+n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n$$

kann dann durch Wahl von $g(z_0) := a_{-m}$ zu einer auf ganz B holomorphen Funktion fortgesetzt werden. Es ist also

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \tag{23.4}$$

mit einer in einer Umgebung von z_0 holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$. Ist umgekehrt g eine in einer Umgebung von z_0 holomorphe Funktion mit $g(z_0) \neq 0$, so besitzt die durch (23.4) erklärte Funktion f in z_0 einen Pol der Ordnung m. Aus (23.4) folgt

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$$

an allen Polstellen z_0 von f. Über das Verhalten an wesentlichen Singularitäten gibt folgender Satz Auskunft.

Satz 23.4 (Casorati/Weierstraß) *Sei z_0 eine isolierte Singularität von f. Dann ist z_0 genau dann eine wesentliche Singularität, wenn zu jedem $\omega \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_n) mit $\lim z_n = z_0$ und $\lim f(z_n) = \omega$ existiert.*

Mit anderen Worten: für jede punktierte Umgebung $U\backslash\{z_0\}$ von z_0 im Holomorphiebereich von f ist das Bild $f(U\backslash\{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$.

23.3 Residuen

Der Begriff *Residuum* wird in mehreren Teilgebieten der Mathematik in unterschiedlicher Weise verwendet. In der Funktionentheorie sind Residuen Wegintegrale über Kreislinien.

Definition 23.5 *Die komplexe Funktion f sei in der punktierten Kreisscheibe $K_{0,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ holomorph, und sei $0 < \rho < R$. Dann heißt das Kurvenintegral*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz =: \mathrm{Res}\,(f, z_0)$$

das Residuum von f an der Stelle z_0.

Nach Satz 22.4 ist diese Definition unabhängig von der Wahl von $\rho \in (0, R)$.

Die Orientierung der Kreislinie $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ ist wieder im Gegenuhrzeigersinn gewählt. Stellen wir f auf $K_{0,R}(z_0)$ durch die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dar und integrieren gliedweise über $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$, so folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^n dz = a_{-1}$$

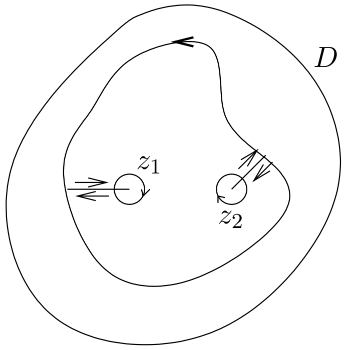
nach Beispiel 1 in Abschnitt 22.1. Das Residuum von f in z_0 ist also dass "Überbleibsel" bei Integration der Laurentreihe und stimmt mit dem Laurentkoeffizienten a_{-1} überein. Ist f auch in z_0 holomorph oder ist z_0 eine hebbare Singularität von f, so ist $\mathrm{Res}\,(f, z_0) = 0$. Klar ist auch, dass

$$\mathrm{Res}\,(f + g, z_0) = \mathrm{Res}\,(f, z_0) + \mathrm{Res}\,(g, z_0).$$

Der folgende Satz ist ein wichtiges Werkzeug zur Integralberechnung.

Satz 23.6 (Residuensatz) *Sei Γ eine geschlossene, stückweise glatte, doppelpunktfreie und im Gegenuhrzeigersinn orientierte Kurve im Inneren eines einfach zusammenhängenden Gebietes D. Weiter sei f auf D mit Ausnahme endlich vieler Punkte, von denen keiner auf Γ liegt, holomorph. Bezeichnen wir die im Inneren von Γ liegenden isolierten Singularitäten von f mit $z_1, z_2, \ldots, z_n$, so gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f, z_k). \tag{23.5}$$



Beweisidee Für jeden der Punkte z_k schneiden wir das Gebiet D entlang einer in z_k beginnenden Strecke S_k bis zum Rand von D auf, wobei keine zwei der Strecken S_k einen nichtleeren Durchschnitt haben sollen. Weiter wählen wir zu jedem z_k eine Kreisscheibe B_k um z_k mit $\overline{B_k} \cap \overline{B_l} = \emptyset$ für $k \neq l$ und so, dass $\overline{B_k}$ komplett im Inneren von Γ liegt. Wie in der Skizze bilden wir aus Γ, den Strecken S_k und den Kreisrändern ∂B_k eine geschlossene stückweise glatte Kurve $\tilde{\Gamma}$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z)\, dz = 0.$$

Da sich die Integrale längs der Strecken S_k aufheben, folgt

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial B_k} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

■

Damit Satz 23.6 wirklich effektiv zur Integralberechnung eingesetzt werden kann, benötigen wir einfache Möglichkeiten zur Berechnung von Residuen. Wir haben bereits bemerkt, dass $\operatorname{Res}(f, z_0)$ der Laurentkoeffizient a_{-1} in der Laurentreihenentwicklung von f um z_0 ist. Für $f(z) = e^{1/z}$ ist daher

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 1.$$

Weitere Möglichkeiten zur Bestimmung von Residuen bieten die folgenden Lemmas.

Lemma 23.7 *Ist z_0 ein einfacher Pol von f, so ist*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{23.6}$$

Dies folgt sofort aus

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

bzw.

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_1)^2 + \dots$$

■

Lemma 23.8 *Sind g und h holomorph in einer Umgebung von z_0 und ist $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$, so hat $f := g/h$ einen Pol erster Ordnung in z_0, und es ist*

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = g(z_0)/h'(z_0). \tag{23.7}$$

Wegen (23.6) ist nämlich

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} \cdot g(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

■

Für $f(z) = \frac{z^2+4}{\sin z}$ ist beispielsweise

$$\mathrm{Res}\,(f, 0) = \left.\frac{z^2 + 4}{\cos z}\right|_{z=0} = 4.$$

Für $f(z) = \frac{z}{z^n-1}$ finden wir an den Stellen $z_k := e^{2\pi ik/n}$, $k = 0, \dots, n-1$

$$\mathrm{Res}\,(f, z_k) = \left.\frac{z}{nz^{n-1}}\right|_{z=z_k} = \frac{z_k}{nz_k^{n-1}} = \frac{z_k^2}{n} = \frac{1}{n}\,e^{4\pi ik/n}$$

(man berücksichtige, dass die z_k die einfachen Nullstellen des Nennerpolynoms und damit einfache Pole von f sind). ■

Etwas weniger handlich ist die Residuenbestimmung an Polen höherer Ordnung.

Lemma 23.9 *Ist z_0 ein Pol k-ter Ordnung von f, so ist*

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z) \right). \tag{23.8}$$

Wie wir aus (23.4) wissen, gibt es eine in einer Umgebung U von z_0 holomorphe Funktion g mit

$$g(z) = (z - z_0)^k f(z) \quad \text{für } z \in U.$$

Ist $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ die Laurentreihenentwicklung von f, so ist $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z - z_0)^n$ die Potenzreihenentwicklung von g. Der Koeffizient a_{-1} steht vor $(z - z_0)^{k-1}$, ist also gleich

$$a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(z_0).$$

Hieraus folgt (23.8). ■

Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n},$$

die in $\pm i$ jeweils einen Pol der Ordnung n besitzt. Um $\operatorname{Res}(f,i)$ zu bestimmen, bilden wir die in einer Umgebung von i holomorphe Funktion

$$g(z) = (z-i)^n f(z) = \frac{1}{(z+i)^n}.$$

Für diese ist

$$\begin{aligned} g^{(n-1)}(z) &= (-n)(-n-1)\dots(-n-n+2)(z+i)^{-n-n+1} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\frac{1}{(z+i)^{2n-1}} \end{aligned}$$

und folglich

$$\operatorname{Res}(f,i) = \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\frac{1}{(2i)^{2n-1}} = -i\,\frac{(2n-2)!}{\big((n-1)!\big)^2}\frac{1}{2^{2n-1}}.$$

■

Für die Funktion $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^3}$ erhält man ähnlich

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}e^{iz} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0} i^2\,e^{iz} = -\frac{1}{2}.$$ ■

Lemma 23.10 a) *Seien g und h holomorph in einer Umgebung von z_0, und sei z_0 eine Nullstelle der Ordnung n von g (d.h. es gibt eine in einer Umgebung U von z_0 holomorphe Funktion $\tilde{g}$ mit $g(z) = (z-z_0)^n\tilde{g}(z)$ und $\tilde{g}(z_0) \neq 0$). Dann ist*

$$\operatorname{res}\left(h\,\frac{g'}{g}, z_0\right) = h(z_0)\cdot n. \tag{23.9}$$

b) *Sei h holomorph in einer Umgebung von z_0, und g habe in z_0 einen Pol der Ordnung p. Dann ist*

$$\operatorname{res}\left(h\,\frac{g'}{g}, z_0\right) = -h(z_0)\,p. \tag{23.10}$$

23.4 Anwendungen des Residuensatzes zur Integralberechnung

Der Residuensatz ermöglicht die Berechnung einiger reeller Integrale, die mit Methoden der reellen Analysis nur schwer zugänglich sind. Wir sehen uns einige Beispielklassen an.

23.4.1 Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

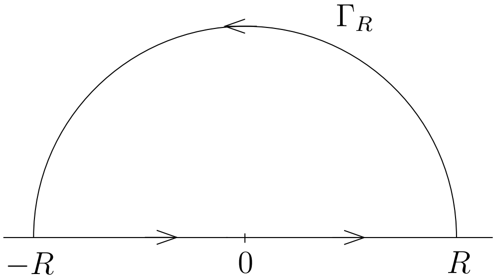
Satz 23.11 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, die die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ umfasst. Die Funktion f sei auf D mit Ausnahme endlich vieler Punkte $z_1, \ldots, z_n$ mit $\operatorname{Im} z_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ holomorph, und es gelte $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. Dann existiert das Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx,$$

und es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k). \tag{23.11}$$

Beweis Für $R > 0$ sei $\Gamma_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Für hinreichend große R liegen alle Singularitäten z_k in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$. Nach dem Residuensatz ist also



$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k). \tag{23.12}$$

Nun ist aber

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)dz \right| \leq \pi R \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)|$$

und $\lim_{R\to\infty} R \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)| = 0$ nach Voraussetzung. Der Grenzübergang $R \to \infty$ in (23.12) liefert die Behauptung (23.11). ■

Die Bedingung $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$ ist z.B. erfüllt, wenn $f = p/q$ eine rationale Funktion ist, bei der der Grad von q um mindestens 2 größer ist als der von p.

Beispiel 2 Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ hat genau vier einfache Pole $z_k := e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3$, von denen z_0 und z_1 in der oberen Halbebene liegen. Die übrigen Voraussetzungen des Satzes sind ebenfalls erfüllt. Aus (23.11) folgt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1)\big) = 2\pi i \left(\frac{1}{4z_0^3} + \frac{1}{4z_1^3} \right).$$

Nach kurzer Rechnung erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\pi.$$ ■

Beispiel 3 Wir berechnen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-x-5}{x^4+3x^2+2}\, dx$. Die Nullstellen des Nennerpolynoms

$$q(z) = z^4 + 3z^2 + 2 = (z^2+1)(z^2+2)$$

sind $z_{1/2} = \pm i$ und $z_{3/4} = \pm i\sqrt{2}$. Nach (23.11) ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-x-5}{x^4+3x^2+2}\, dx = 2\pi i \big(\mathrm{Res}\,(f,i) + \mathrm{Res}\,(f, i\sqrt{2})\big).$$

Mit Lemma 23.8 findet man

$$\mathrm{Res}\,(f,i) = \frac{2i^2-i-5}{4i^3+6i} = \frac{-7-i}{2i} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$$

und

$$\mathrm{Res}\,(f,\sqrt{2i}) = \frac{2\cdot 2i^2 - \sqrt{2}\,i - 5}{4\cdot 2\sqrt{2}\,i^3 + 6i\sqrt{2}} = \frac{-9-\sqrt{2}\,i}{-2\sqrt{2}\,i} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2\sqrt{2}}\,i.$$

Also ist das gesuchte Integral gleich $2\pi i\big(-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{1}{2}-\frac{9}{2\sqrt{2}}i\big) = \pi\big(\frac{9}{\sqrt{2}}-7\big)$. ■

23.4.2 Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \alpha x f(x) dx$

Satz 23.12 *Sei D wie in Satz 23.11. Die Funktion f sei auf D mit Ausnahme endlich vieler Punkte $z_1, \ldots, z_n$ mit* $\mathrm{Im}\, z_k > 0$ *für $k = 1, \ldots, n$ holomorph, und es gelte* $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. *Dann ist für alle $\alpha > 0$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \alpha x f(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin \alpha x\, f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,\big(e^{i\alpha z} f(z), z_k\big). \qquad (23.13)$$

Die linke Seite schreibt man auch als $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx$ und man nennt dies die *Fouriertransformation* von f. Man beachte, dass die Voraussetzungen in Satz 23.12 schwächer sind als in Satz 23.11. Die Bedingung $\lim f(z) = 0$ ist für eine rationale Funktion $f = p/q$ bereits dann erfüllt, wenn der Grad des Nennerpolynoms um mindestens 1 größer als der des Zählerpolynoms ist.

Beispiel 4 Wir berechnen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2}\, dx$ für $\alpha > 0$. Die Funktion $f(z) := (1+z^2)^{-2}$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes. Ihre einzige Singularität in der oberen Halbebene ist der Punkt $z_1 = i$, wo eine doppelte Polstelle vorliegt. Nach Satz 23.12 ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2}\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{(1+x^2)^2}\, dx = 2\pi i\, \mathrm{Res}\,(e^{i\alpha z} f(z), i).$$

Da $x \mapsto \frac{\sin \alpha x}{(1+x^2)^2}$ eine ungerade Funktion ist, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{(1+x^2)^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin \alpha x}{(1+x^2)^2}\, dx = 0.$$

Mit Lemma 23.9 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2}\, dx &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\alpha z}}{(1+z^2)^2}, i\right) \\
&= 2\pi i \lim_{z\to i} \left(\frac{d}{dz}\, \frac{e^{i\alpha z}}{(z+i)^2}\right) \\
&= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{i\alpha e^{i\alpha z}(z+i)^2 - e^{i\alpha z}\cdot 2(z+i)}{(z+i)^4} \\
&= 2\pi i\, \frac{i\alpha e^{-\alpha}(2i)^2 - e^{-\alpha}\cdot 4i}{16} \\
&= \frac{\alpha+1}{2}\, \pi e^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

■

23.4.3 Trigonometrische Integrale $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$

Satz 23.13 *Sei $R = R(z) = R(x,y)$ eine komplexe rationale Funktion, die keine Pole auf der Einheitskreislinie hat, und sei*

$$\tilde{R}(z) := \frac{1}{zi}\, R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right).$$

Dann ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(\tilde{R}, z_k), \tag{23.14}$$

wobei $z_1, \ldots, z_n$ die isolierten Singularitäten von $\tilde{R}$ in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sind.

Mit $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ ist nämlich $\cos t = \frac{z+z^{-1}}{2}$ und $\sin t = \frac{z-z^{-1}}{2i}$. Also ist

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt &= \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{zi}\, dz \\
&= \int_{|z|=1} \tilde{R}(z)\, dz,
\end{aligned}$$

woraus (23.14) mit dem Residuensatz folgt. ■

Beispiel 5 Wir berechnen $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{5/4 - \cos t}\, dt$. Wegen $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ ist

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{zi}\, \frac{\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2}{\frac{5}{4} - \frac{z+z^{-1}}{2}} = -i\, \frac{2z^4+2}{-2z^4+5z^3-2z^2}.$$

Das Nennerpolynom hat eine doppelte Nullstelle $z_1 = z_2 = 0$ und einfache Nullstellen $z_3 = 1/2$ und $z_4 = 2$. Nach Lemma 23.8 ist

$$\operatorname{Res}(\tilde{R}, 1/2) = \frac{-2i\left(\frac{1}{16}+1\right)}{-8\cdot\frac{1}{8}+15\cdot\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{17}{6}i,$$

und mit Lemma 23.9 finden wir

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(\tilde{R}, 0) &= -i\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\,\frac{2z^4+2}{-2z^2+5z-2}\right)\\ &= -i\lim_{z\to 0}\frac{8z^3(-2z^2+5z-2)-(2z^4+2)(-4z+5)}{(-2z^2+5z-2)^2} = \frac{5}{2}\,i.\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2t}{\frac{5}{4}-\cos t}\,dt = 2\pi i\left(\frac{5}{2}i-\frac{17}{6}i\right) = \frac{2}{3}\pi.$$

■

Beispiel 6 Als weitere Anwendung von Satz 23.13 berechnen wir $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-2p\cos t+p^2}$ mit $p\in\mathbb{C}, |p|\neq 1$. Dann ist $R(x,y) = \frac{1}{1-2px+p^2}$, also

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{zi}\,\frac{1}{1-p(z+z^{-1})+p^2} = \frac{1}{i}\,\frac{1}{(z-p)(1-pz)}.$$

Die Funktion $\tilde{R}$ hat genau einen Pol in $\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$, nämlich p falls $|p|<1$ und $1/p$ falls $|p|>1$. In beiden Fällen ist der Pol einfach, und Lemma 23.7 ergibt

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(\tilde{R}, p) &= \frac{1}{i}\,\frac{1}{1-p^2} && \text{für } |p|<1,\\ \operatorname{Res}(\tilde{R}, \tfrac{1}{p}) &= \frac{1}{i}\,\frac{1}{p^2-1} && \text{für } |p|>1.\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-2p\cos t+p^2} = \begin{cases}\frac{2\pi}{1-p^2} & \text{für } |p|<1\\ \frac{2\pi}{p^2-1} & \text{für } |p|>1.\end{cases}$$

■

Zahlreiche weitere Anwendungen des Residuensatzes zur Integralberechnung finden Sie in Lehrbüchern zur Funktionentheorie wie Remmert: Funktionentheorie I sowie in Burg/Haf/Wille IV.