22 Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel

22.1 Komplexe Wegintegrale

Wir sehen uns nun die Integration im Komplexen an. Komplexe Wegintegrale definieren wir ähnlich wie Wegintegrale im $\mathbb{R}^2$.

Definition 22.1 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ sei eine stetige Funktion, und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ sei ein stetig differenzierbarer Weg, der ganz in D verläuft. Dann heißt das Integral*

$$\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, \dot{\gamma}(t)\, dt \tag{22.1}$$

das Wegintegral von f längs des Weges γ. Wir bezeichnen dieses Integral mit $\int_\gamma f(z)dz$.

In (22.1) hat man über eine komplexwertige Funktion $g(t) := f\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}(t)$ auf einem Intervall $[a, b]$ zu integrieren. Diese Integration erklären wir wie folgt:

$$\int_a^b g(t)dt := \int_a^b (\operatorname{Re} g)(t)dt + i \int_a^b (\operatorname{Im} g)(t)dt.$$

Setzt sich ein Weg γ aus stetig differenzierbaren Wegen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ zusammen und ist f stetig, so definieren wir

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_{\gamma_1} f(z)dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

Einige Eigenschaften komplexer Wegintegrale

a) $\int_\gamma f(z)dz$ hängt nur von der Kurve $\Gamma := \{\gamma(t) \in \mathbb{C} : t \in [a, b]\}$ und deren Orientierung ab, nicht von der Parametrisierung. Genauer: Sind $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 = [c, d] \to \mathbb{C}$ zwei stetig differenzierbare und doppelpunktfreie Wege, die die gleiche Kurve Γ erzeugen und die gleiche Orientierung von Γ induzieren, so ist

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Diesen gemeinsamen Wert nennt man *Kurvenintegral* von f über Γ, und wir schreiben für ihn $\int_\Gamma f(z)dz$.

b) $\displaystyle\int_\gamma \big(f(z) + g(z)\big)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz.$

c) $\displaystyle\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$ (Summe von Wegen).

d) $\displaystyle\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$ (entgegengesetzter Weg).

e) $\displaystyle\Big|\int_\gamma f(z)dz\Big| \leq L(\gamma)\max_{z\in\Gamma}|f(z)|$.

f) Seien $\hat{D}$, D offen, $g : \hat{D} \to D$ holomorphe Funktion, $\hat{\gamma} : [a,b] \to \hat{D}$ stetig differenzierbarer Weg, $\gamma := g \circ \hat{\gamma}$ und f stetig auf D. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\hat{\gamma}} f\big(g(\zeta)\big)g'(\zeta)d\zeta.$$

g) Sei γ ein stückweise differenzierbarer Weg mit zugehöriger Kurve Γ, und f_n seien stetige Funktionen auf Γ, die gleichmäßig gegen eine Funktion f auf Γ konvergieren. Dann ist f stetig und

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

Es folgen noch zwei weitere Berechnungsmöglichkeiten für komplexe Wegintegrale.

h) Seien $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma = x + iy : [a,b] \to D$ ein stetig differenzierbarer Weg. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b \Big(u\big(x(t),y(t)\big)\dot{x}(t) - v\big(x(t),y(t)\big)\dot{y}(t)\Big)dt \\ &\quad + i\int_a^b \Big(v\big(x(t),y(t)\big)\dot{x}(t) + u\big(x(t),y(t)\big)\dot{y}(t)\Big)dt.\end{aligned}$$

Schreibt man nämlich die beiden Integrale auf der rechten Seite unter ein Integralzeichen, so erhält man den Integranden

$$f\big(\gamma(t)\big)\dot{x}(t) + if\big(\gamma(t)\big)\dot{y}(t) = f\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}(t).$$

i) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine holomorphe Funktion $F : D \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* von $f : D \to \mathbb{C}$, wenn $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$. Besitzt $f : D \to \mathbb{C}$ auf D eine Stammfunktion F und ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, der ganz in D verläuft, so ist

$$\int_\gamma f(z)dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

Beweis

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt = \int_a^b F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)dt = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big),\end{aligned}$$

wobei wir die Kettenregel und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzt haben. ■

Wir berechnen nun einige der für die Funktionentheorie wichtigsten Integrale.

Beispiel 1 Sei B die Kreisscheibe mit Mittelpunkt $c \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$. Der Rand ∂B von B ist die geschlossene Kurve $\{z \in \mathbb{C} : |z - c| = r\}$. Wir vereinbaren, geschlossene Kurven immer im Gegenuhrzeigersinn zu orientieren, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird. Mit dieser Vereinbarung ist

$$\int_{\partial B} (z-c)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1\} \\ 2\pi i & \text{falls } n = -1. \end{cases}$$

Der Fall $n \neq -1$ ist einfach, da die Funktion $F(z) = \frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion für $f(z) = (z-c)^n$ auf $\mathbb{C}\backslash\{c\}$ ist und da die Kurve ∂B in diesem Gebiet liegt. Die Kreislinie ∂B wird beispielsweise parametrisiert durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \mapsto c + re^{it}.$$

Also ist für $n \neq -1$ nach Eigenschaft (i)

$$\int_{\partial B} (z-c)^n dz = F\big(\gamma(2\pi)\big) - F\big(\gamma(0)\big) = F(c+r) - F(c+r) = 0.$$

Für $n = -1$ rechnen wir mit der Definition (22.1)

$$\int_{\partial B} \frac{1}{z-c} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t) - c}\, \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}}\, ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$ ■

Beispiel 2 Sei wieder $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < r\}$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} 1 & \text{wenn } |z-c| < r \\ 0 & \text{wenn } |z-c| > r. \end{cases}$$

Ein Vorgehen wie in Beispiel 1 ist wenig aussichtsreich. Durch einen Trick reduzieren wir das Problem auf den Fall $z = c$, den wir in Beispiel 1 betrachtet haben. Sei zunächst $|z - c| < r$. Wir setzen $w := \frac{z-c}{\zeta-c}$ mit $\zeta \in \partial B$ und erhalten wegen $|w| = \frac{|z-c|}{r} < 1$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - c - (z-c)} = \frac{1}{\zeta - c}\, \frac{1}{1-w} = \frac{1}{\zeta - c} \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

(geometrische Reihe). Wegen $|w| < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} |w|^n$ eine absolut konvergente Majorante für

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-c}{\zeta-c} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^n.$$

Diese Reihe konvergiert daher gleichmäßig auf ∂B (Satz 12.5). Nach Eigenschaft (g) (die natürlich entsprechend auch für Reihen = Folgen von Partialsummen gilt) ist für alle z mit $|z-c|<r$

$$\int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - c} \left(\frac{z-c}{\zeta - c}\right)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z-c)^n \int_{\partial B} \frac{d\zeta}{(\zeta - c)^{n+1}}\,,$$

und dies ist gleich $2\pi i$ nach Beispiel 1. Für z mit $|z-c|>r$ schreiben wir $\frac{1}{\zeta - z}$ als $\frac{-1}{z-c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-c}{z-c}\right)^n$ und erhalten analog

$$\int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-c)^{n+1}} \int_{\partial B} (\zeta - c)^n d\zeta = 0.$$

■

Beispiel 3 Die Funktion Ln ist auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ eine Stammfunktion für $f(z) = \frac{1}{z}$. Also gilt für jeden Weg γ in $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_0.$$

Insbesondere ist für $\gamma : [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$ mit $r, \varepsilon > 0$, d.h. für einen Kreis um 0 mit Radius r, der eine kleine Lücke an der negativen reellen Achse aufweist,

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \ln r + i(\pi - \varepsilon) - \big(\ln r + i(-\pi + \varepsilon)\big) = i(2\pi - 2\varepsilon).$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ erhält man das Integral über dem Vollkreis

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{z}\, dz = \lim_{\varepsilon \searrow 0} i(2\pi - 2\varepsilon) = 2\pi i$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 1. ■

22.2 Der Cauchysche Integralsatz

Wir lernen nun eines der zentralen Resultate der Funktionentheorie kennen.

Satz 22.2 (Cauchyscher Integralsatz) *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, γ ein in G verlaufender stückweise stetig differenzierbarer und geschlossener Weg, und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist*

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

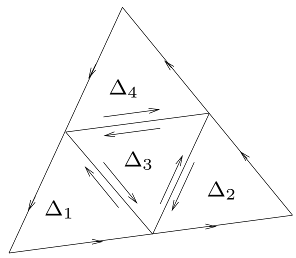
Wegen der Bedeutung dieses Satzes wollen wir uns seinen Beweis in einer einfachen Situation ansehen. Wichtigstes Hilfsmittel für den Beweis ist

Lemma 22.3 (Integrallemma von Goursat) *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf D. Dann gilt für den Rand jeder Dreiecksfläche $\Delta \subset D$*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Mit anderen Worten: der Cauchysche Integralsatz gilt für Dreiecksränder.

Beweis Für jedes Dreieck Δ bezeichnen wir mit $L(\partial\Delta)$ seinen Umfang, und wir setzen $a(\Delta) := \int_{\partial\Delta} f(z)dz$.



Durch Seitenhalbierung teilen wir das Ausgangsdreieck Δ in vier kongruente Teildreiecke $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$. Wegen Eigenschaften (c) und (d) ist dann

$$a(\Delta) = \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} a(\Delta_j).$$

Unter den vier Integralen $a(\Delta_j)$ wählen wir ein betragsgrößtes aus. Das zugehörige Dreieck bezeichnen wir mit Δ^1. Dann gilt

$$|a(\Delta)| \leq 4|a(\Delta^1)| \quad \text{und} \quad L(\partial\Delta^1) = \frac{1}{2}\, L(\partial\Delta).$$

Dieses Vorgehen wiederholen wir für Δ^1 und erhalten ein Dreieck Δ^2. So fortfahrend entsteht eine Folge $\Delta \supset \Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \ldots$ abgeschlossener Dreiecke mit

$$|a(\Delta)| \leq 4^n|a(\Delta^n)| \quad \text{und} \quad L(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2^n}\, L(\partial\Delta). \tag{22.2}$$

Der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty}\Delta^n$ besteht aus genau einem Punkt c. Da $c \in D$ und f auf D holomorph ist, gibt es eine auf D stetige Funktion g mit $g(c) = 0$ so, dass

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z - c) + (z - c)g(z) \quad \text{für alle } z \in D \tag{22.3}$$

(vgl. Beweis von Satz 4.2). Die lineare Funktion $z \mapsto f(c) + f'(c)(z - c)$ besitzt offenbar eine Stammfunktion. Daher ist

$$\int_{\partial\Delta^n} \big(f(c) + f'(c)(z - c)\big)dz = 0 \quad \text{für } n \geq 1,$$

und aus (22.3) folgt durch Integrieren über $\partial\Delta^n$

$$a(\Delta^n) = \int_{\partial\Delta^n} (z-c)g(z)\,dz \quad \text{für } n \geq 1.$$

Mit Eigenschaft (e) und (22.2) folgt

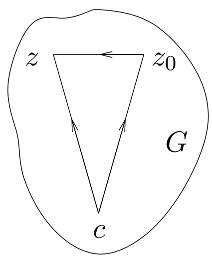
$$|a(\Delta^n)| \leq L(\partial\Delta^n) \max_{z\in\partial\Delta^n} |(z-c)g(z)| \leq L(\partial\Delta^n)^2 \max_{z\in\partial\Delta^n} |g(z)|$$

und weiter

$$|a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)| \leq 4^n L(\partial\Delta^n)^2 \max_{z\in\partial\Delta^n} |g(z)| = L(\partial\Delta)^2 \max_{z\in\partial\Delta^n} |g(z)|.$$

Wegen $g(c) = 0$ und der Stetigkeit von g findet man für jedes $\varepsilon > 0$ ein n mit $\max_{z\in\partial\Delta^n} |g(z)| < \varepsilon$. Also ist $|a(\Delta)| \leq \varepsilon L(\partial\Delta)^2$ für jedes $\varepsilon > 0$ und folglich ist $|a(\Delta)| = 0$. ∎

Beweis des Cauchyschen Integralsatzes für Sterngebiete Wir zeigen nun die folgende Aussage: Ist G ein Sterngebiet mit Zentrum c und f holomorph auf G, so ist $F(z) := \int_{[c,z]} f(\zeta)d\zeta$ eine Stammfunktion von f. Wenn das gezeigt ist, ist klar, dass für jeden geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Weg γ in G das Integral $\int_\gamma f(z)dz = 0$ ist.



Wir müssen zeigen, das F in jedem Punkt $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist und dass $F'(z_0) = f(z_0)$. Sei z so nahe an z_0, dass auch die Strecke $[z_0, z]$ noch ganz in G liegt. Nach dem Lemma von Goursat ist

$$\int_{[c,z_0]+[z_0,z]+[z,c]} f(\zeta)d\zeta = 0$$

und demzufolge

$$F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta. \tag{22.4}$$

Wir definieren

$$F_1(z) := \begin{cases} \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} & \text{für } z \neq z_0 \\ f(z_0) & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

und zeigen, dass F_1 an der Stelle z_0 stetig ist. Wegen (22.4) und $\int_{[z_0,z]} d\zeta = z - z_0$ ist

$$F_1(z) - F_1(z_0) = \frac{1}{z-z_0} \int_{[z_0,z]} \big(f(\zeta) - f(z_0)\big)d\zeta,$$

woraus mit Abschätzung (e) folgt

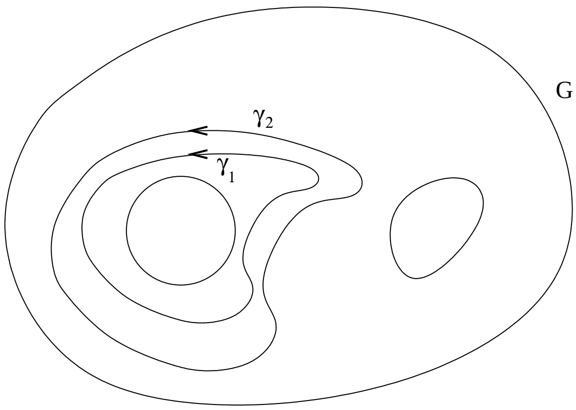
$$\begin{aligned} |F_1(z) - F_1(z_0)| &\leq \frac{1}{|z - z_0|} L([z_0, z]) \max_{\zeta \in [z_0, z]} |f(\zeta) - f(z_0)| \\ &= \max_{\zeta \in [z_0, z]} |f(\zeta) - f(z_0)| \to 0 \quad \text{für } z \to z_0 \end{aligned}$$

wegen der Stetigkeit von f. Also ist F_1 stetig in z_0. ■

Hier ist noch eine Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes auf nicht einfach zusammenhängende Gebiete.

Satz 22.4 *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und f holomorph auf G. Weiter seien γ_1 und γ_2 zwei geschlossene doppelpunktfreie stückweise stetig differenzierbare Wege, die ganz in G verlaufen. Dabei soll γ_1 ganz im Innengebiet von γ_2 verlaufen, und das Ringgebiet zwischen γ_1 und γ_2 liege ganz in G. Haben außerdem γ_1 und γ_2 die gleiche Orientierung, so ist*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$



22.3 Die Cauchysche Integralformel

Eine überraschende Konsequenz des Cauchyschen Integralsatzes ist die folgende Cauchysche Integralformel.

Satz 22.5 *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und γ ein doppelpunktfreier geschlossener stückweise stetig differenzierbarer Weg, der positiv (d.h. im Gegenuhrzeigersinn) orientiert ist. Ist f auf G holomorph und liegt $z_0 \in G$ im Innengebiet von γ, so ist*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0). \tag{22.5}$$

Zur Berechnung des Integrals auf der linken Seite von (22.5) benötigt man lediglich die Funktionswerte von f auf der Kurve $\Gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{C} : t \in [a,b]\}$. Die Cauchysche Integralformel (22.5) zeigt daher, dass die Funktionswerte von f im Inneren der Kurve Γ durch die Funktionswerte auf Γ bereits vollständig und eindeutig bestimmt sind. Es ist also nicht möglich, f im Inneren von Γ abzuändern, ohne die Holomorphie zu zerstören.

Liegt z_0 im Außengebiet von Γ, so ist natürlich

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0$$

nach dem Cauchyschen Integralsatz.

Die Cauchysche Integralformel liefert auch einen bequemen Weg zur Berechnung gewisser komplexer Wegintegrale über geschlossenen Kurven.

Beispiel 4 Sei G die Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -2\}$ und Γ der Kreis um $2i$ mit dem Radius 1. Um $\int_\Gamma \frac{1}{z^2+4}\,dz$ zu bestimmen, schreiben wir

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^2+4}\,dz = \int_\Gamma \frac{1}{(z-2i)(z+2i)}\,dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-2i}\,dz$$

mit der auf G holomorphen Funktion $f(z) = \frac{1}{z+2i}$. Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^2+4}\,dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-2i}\,dz = 2\pi i\, f(2i) = \frac{2\pi i}{4i} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Für $f(z) = 1$ und $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ erhalten wir aus (22.5) natürlich das bereits bekannte Ergebnis

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i. \qquad \blacksquare$$

22.4 Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen

In Satz 21.4 haben wir festgestellt, dass jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$ holomorph ist und dass die abgeleitete Potenzreihe $f'(z) = \sum_{n=1}^\infty n\, a_n(z-z_0)^{n-1}$ ebenfalls den Konvergenzradius R hat. Hieraus folgt natürlich, dass holomorphe Funktionen, die sich durch Potenzreihen darstellen lassen, unendlich oft komplex differenzierbar sind. Wir werden nun sehen, dass man *jede* holomorphe Funktion lokal in eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius entwickeln kann. Dies folgt leicht aus dem folgenden Lemma.

Lemma 22.6 *Sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in $\mathbb{C}$ mit zugehöriger Kurve Γ, und sei $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist die Funktion*

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \,, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma$$

holomorph auf $\mathbb{C} \backslash \Gamma$, und für jedes $z_0 \in \mathbb{C} \backslash \Gamma$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad mit \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta$$

auf jeder offenen Kreisscheibe um z_0, die Γ nicht trifft, gegen $F(z)$.

Aus diesem so genannten *Entwicklungslemma* folgt natürlich, dass F auf $\mathbb{C} \backslash \Gamma$ unendlich oft komplex differenzierbar ist. Da die Koeffizienten einer Potenzreihe $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ durch $a_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(z_0)$ gegeben sind, folgt weiter

$$F^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \,. \tag{22.6}$$

Das Entwicklungslemma ordnet also jeder auf Γ stetigen Funktion f eine auf $\mathbb{C} \backslash \Gamma$ holomorphe Funktion F zu. Der Zusammenhang zwischen f und F ist jedoch recht lose. So gilt i.a. NICHT, dass $\lim_{z \to z_0} F(z) = f(z_0)$ für $z_0 \in \Gamma$. Dies ändert sich auf Grund der Cauchyschen Integralformel, wenn wir von vornherein f als holomorph in einer Umgebung von Γ annehmen.

Satz 22.7 (Entwicklungssatz) *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, und B sei die größte offene Kreisscheibe um z_0, die komplett in D liegt. Dann ist jede auf D holomorphe Funktion f um z_0 in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ entwickelbar, die auf B gegen f konvergiert. Die Koeffizienten a_n ergeben sich aus*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta, \tag{22.7}$$

wobei B' irgendeine Kreisscheibe um z_0 ist, die kleiner als B ist (so dass ihr Rand $\partial B'$ komplett in D liegt). Insbesondere ist f auf D beliebig oft komplex differenzierbar, und in jeder Kreisscheibe $B' \subset B$ um z_0 gelten die Cauchyschen Integralformeln

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta, \quad z \in B', \, n \geq 0. \tag{22.8}$$

Beweis Da f holomorph ist, gilt die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, \quad z \in B'.$$

Das Entwicklungslemma (angewandt auf $\Gamma := \partial B'$ und $F := f$ auf B') liefert die Behauptung. ■

Funktionen, die auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ *einmal* komplex differenzierbar sind, sind dort also *beliebig oft* komplex differenzierbar, und sie lassen sich auf *jeder* Kreisscheibe in D in eine gegen diese Funktion konvergierende Potenzreihe entwickeln. Vergleichen Sie dies mit der Situation im Reellen!

Beispiel 5 Sei Γ eine stückweise glatte geschlossene und doppelpunktfreie Kurve, die den Nullpunkt umschließt. Mit den auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktionen $f(z) = 1$ und $g(z) = \sin z$ erhält man für $n \geq 0$

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^{n+1}}\, dz = n!\, 2\pi i f^{(n)}(0) = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n > 0 \end{cases}$$

und

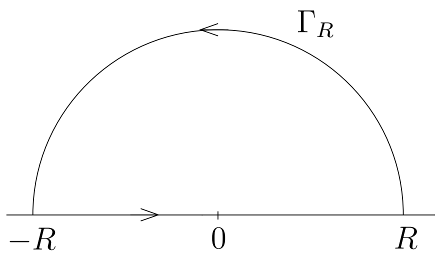
$$\frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sin z}{z^{n+1}}\, dz = g^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{falls n gerade} \\ 1 & \text{falls } n = 4k+1 \\ -1 & \text{falls } n = 4k+3 \end{cases}$$

mit $k \geq 0$. ■

Beispiel 6 Die Cauchysche Integralformeln können auch zur Berechnung reeller Integrale genutzt werden. Als Beispiel sehen wir uns das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2}\, dx$$

an. Für $R > 0$ bestehe die Kurve Γ_R aus der Strecke $[-R, R]$ und dem oberen Halbkreis um 0 von R bis $-R$. Für die auf $\mathbb{C}\backslash\{+i\}$ holomorphe Funktion



$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1 + z^2} = \frac{e^{iz}/(z + i)}{z - i} =: \frac{g(z)}{z - i}$$

gilt nach der Cauchyschen Integralformel (22.5)

$$\int_\Gamma f(z) dz = 2\pi i g(i) = 2\pi i \,\frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

(beachte, dass g in einer Umgebung der oberen Halbebene holomorph ist).

Dieses Ergebnis ist unabhängig von R. Das Teilintegral über die Strecke $[-R, R]$ ist

$$\int\limits_{[-R,R]} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx,$$

da $x \mapsto \frac{\sin x}{1+x^2}$ eine ungerade Funktion ist. Das zweite Teilintegral über dem Halbkreis $H_R := \{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$ läßt sich abschätzen durch

$$\begin{aligned} \Big|\int_{H_R} f(z)dz\Big| &= \Big|\int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{1+(Re^{it})^2}\,Rie^{it}dt\Big| \\ &\leq R\pi \max_{t\in[0,\pi]} \Big|\frac{e^{iR(\cos t + i\sin t)}}{1+R^2e^{2it}}\Big| \\ &\leq \frac{R\pi}{R^2-1} \max_{t\in[0,\pi]} e^{-R\sin t} = \frac{R\pi}{R^2-1} \quad \text{für } R > 1. \end{aligned}$$

Dieses Teilintegral konvergiert also für $R \to \infty$ gegen 0. In

$$\frac{\pi}{e} = \int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx + \int_{H_R} f(z)dz$$

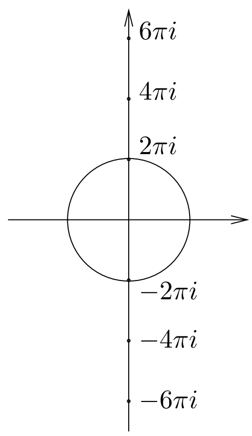
konvergieren somit das linke Integral gegen $\frac{\pi}{e}$ und das rechte gegen 0. Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}\,. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 7 Der Entwicklungssatz gestattet häufig die unmittelbare Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe. Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(z) = z/(e^z - 1)$.Diese ist zunächst für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z \neq 1$, d.h. für alle $z \neq 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$, definiert. Wegen

$$e^z - 1 = z\big(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots\big)$$

können wir aber $f(0) = 1$ festlegen und erhalten eine Funktion, die auch in einer Umgebung der 0 holomorph ist. Wir können f also in einer Umgebung der 0 in eine Potenzreihe entwickeln, und diese konvergiert auf der größten offenen Kreisscheibe um 0, die im Holomorphiegebiet liegt. Ihr Konvergenzradius ist also 2π.



$\blacksquare$

Beispiel 8 Möchte man eine holomorphe Funktion f um einen Punkt z_0 in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ entwickeln, so kann man die Koeffizienten a_n nach

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{oder} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

berechnen, wobei $\overline{B}$ eine abgeschlossene Kreisscheibe um z_0 ist, die komplett im Holomorphiebereich von f liegt. Häufig ist es jedoch einfacher, bereits bekannte Potenzreihenentwicklungen zu benutzen.

Als Beispiel betrachten wir die auf $G = \mathbb{C}\backslash\{1,-2\}$ holomorphe Funktion $f(z) = \frac{3}{(1-z)(2+z)}$. Nach dem Entwicklungssatz kann man diese Funktion in eine Potenzreihe um den Punkt $z_0 = i$ entwickeln, und der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist $\sqrt{2}$ (warum?). Aus der Partialbruchzerlegung

$$\frac{3}{(1-z)(2+z)} = \frac{1}{2+z} + \frac{1}{1-z}$$

folgt, dass wir lediglich die Funktionen $z \mapsto \frac{1}{2+z}$ und $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ in Potenzreihen um i entwickeln müssen. Daher benutzen wir die uns bekannte geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

die für $|z| < 1$ konvergiert. Es ist

$$\frac{1}{2+z} = \frac{1}{2+i+z-i} = \frac{1}{2+i}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{2+i}} = \frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(z-i)^n}{(2+i)^n}$$

sowie

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-(z-i)} = \frac{1}{1-i}\,\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} = \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^n},$$

wobei die Reihen für $\left|\frac{z-i}{2+i}\right| < 1$, d.h. für $|z-i| < \sqrt{5}$ und für $\left|\frac{z-i}{1-i}\right| < 1$, d.h. für $|z-i| < \sqrt{2}$ konvergieren. Für $|z-i| < \sqrt{2}$ konvergieren also beide Reihen, und wir erhalten $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$ mit

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}} + \frac{1}{(1-i)^{n+1}} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots\,. \qquad \blacksquare$$

22.5 Eigenschaften holomorpher Funktionen

Wir sehen uns in diesem Abschnitt weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen an. Aus der Cauchyschen Integralformel (22.5) folgt für jede Funktion f, die holomorph auf einer Umgebung der Abschließung der Kreisscheibe

$U_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ist, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0).$$

Mit der Standardabschätzung (Eigenschaft (e) des Wegintegrals) folgt die *Mittelwertungleichung*

$$|f(z_0)| \leq \max_{z \in \partial B} |f(z)|.$$

Dies läßt sich wesentlich verallgemeinern.

Satz 22.8 (Cauchysche Ungleichung) *Sei f holomorph in einer Umgebung des abgeschlossenen Kreises $\overline{B_r(z_0)}$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jede positive Zahl $d < r$*

$$|f^{(k)}(z)| \leq k!\, \frac{r}{d^{k+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \quad \textit{für alle } z \in \overline{B_{r-d}(z_0)}.$$

Der folgende Identitätssatz zeigt einen überraschend engen Zusammenhang zwischen den Werten einer holomorphen Funktion auf.

Satz 22.9 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen) *Sei G ein Gebiet, und f und g seien auf G holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

a) *$f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.*

b) *$f(z_n) = g(z_n)$ für eine Folge (z_n) paarweise verschiedener Punkte $z_n \in G$, die sich in G häufen.*

c) *Es gibt ein $z_0 \in G$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \geq 0$.*

Eine holomorphe Funktion ist also bereits durch die Funktionswerte an abzählbar unendlich vielen Stellen festgelegt, wenn sich diese Stellen im Holomorphiegebiet häufen.

Folgerung 22.10 *Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ umfasst, und ist f eine komplexwertige Funktion auf I, so gibt es* höchstens eine *auf G definierte holomorphe Funktion F, die auf I mit f übereinstimmt.*

Man kann also die reelle Sinusfunktion nur auf eine einzige Weise zu einer auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion fortsetzen. Mit dem Identitätssatz lassen sich auch „analytische Identitäten“ fortsetzen („Permanenzprinzip“). Stellen wir uns vor, wir hätten $z \mapsto e^2$ als holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ definiert, wüssten aber nur für alle *reellen* z und w, dass $e^{z+w} = e^z e^w$. Für ein fixiertes $w \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktionen $f(z) := e^{w+z}$ und $g(z) := e^w e^z$ auf $\mathbb{C}$. Diese sind holomorph auf $\mathbb{C}$ und stimmen auf $\mathbb{R}$ überein. Nach dem Identitätssatz stimmen sie auf $\mathbb{C}$ überein, d.h. es ist

$$f(z) = g(z) \quad \text{bzw.} \quad e^{w+z} = e^w e^z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und } w \in \mathbb{R}.$$

Wir wiederholen diese Überlegung mit fixiertem $z \in \mathbb{C}$ und erhalten die Gültigkeit von $e^{w+z} = e^w e^z$ für alle w und z aus $\mathbb{C}$. ■

Mit dem Entwicklungssatz erhält man aus Satz 22.9 leicht den folgenden Identitätssatz.

Satz 22.11 (Identitätssatz für Potenzreihen)
Seien $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $R > r > 0$. Stimmen f und g auf einer Umgebung $U_\rho(z_0)$ mit $r > \rho > 0$ (oder nur in unendlich vielen paarweise verschiedenen Punkten dieser Umgebung) überein, so ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und daher $R = r$ und $f(z) = g(z)$ für alle $z \in U_R(z_0)$.

Beispiel 9 Die durch $f(z) = \frac{1}{\cos z}$ definierte Funktion ist auf $\mathbb{C}\backslash\big\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots \big\}$ holomorph und kann nach dem Entwicklungssatz in eine Potenzreihe

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$$

mit Konvergenzradius $\pi/2$ entwickelt werden. Es ist also

$$\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right)\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\right) = 1.$$

Cauchyprodukt und Koeffizientenvergleich liefern bei

$$\begin{array}{llcll} z^0: & a_0 & = & 1 & \\ z^1: & a_1 & = & 0 & \\ z^2: & a_2 - \frac{1}{2} & = & 0 & \\ z^3: & a_3 - \frac{a_1}{2} & = & 0 & \\ z^4: & a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24} & = & 0 & \text{u.s.w.} \end{array}$$

Hieraus erhält man nacheinander $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}\,, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24}\,$. Also ist

$$\frac{1}{\cos z} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{11}{24}\, z^4 + \ldots$$ ■

Eine Funktion, die auf der gesamten komplexen Ebene definiert und dort holomorph ist, heißt *ganz*. Ganze Funktionen sind z.B. die komplexe Exponentialfunktion und die komplexen Sinus- und Kosinusfunktionen.

Satz 22.12 (Satz von Liouville) *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Eine bemerkenswerte Anwendung findet dieser Satz beim Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Satz 22.13 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Hieraus folgt leicht, dass jedes Polynom P vom Grad $n \geq 1$ genau n komplexe Nullstellen besitzt (gezählt unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheiten) und dass jedes solche Polynom eindeutig in Linearfaktoren zerlegt werden kann:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{r=1}^{n} (z - z_r) \quad (a_n \neq 0),$$

wobei $z_1, \ldots, z_n$ die Nullstellen von P sind.

Beim Beweis von Satz 22.13 nimmt man an, dass $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $1/P(z)$ erklärt, und man zeigt, dass diese Funktion beschränkt ist. Nach Liouville ist dann $1/P(z)$ konstant. Widerspruch. ∎

Unser letztes Ziel in diesem Abschnitt ist das Maximumprinzip. Wir beginnen mit einem eng verwandten Resultat.

Satz 22.14 (Offenheitssatz) *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und nirgends lokal konstant. Dann bildet f offene Mengen auf offene Mengen ab.*

Nirgends lokal konstant bedeutet: auf keiner Umgebung eines Punktes aus D konstant. Dieser Satz schließt die Existenz holomorpher Funktionen mit gewissen Eigenschaften aus. Z.B. gibt es keine nichtkonstante holomorphe Funktion, deren Real- oder Imaginärteil oder deren Betrag konstant ist.

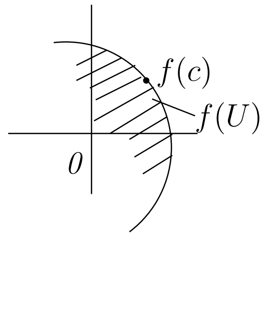
Da nirgends lokal konstante holomorphe Funktionen offene Mengen auf offene Mengen abbilden und da stetige Funktionen zusammenhängende Mengen in zusammenhängende Mengen überführen, kann man den Offenheitssatz auch so formulieren:

Folgerung 22.15 *Sei f holomorph und nicht konstant im Gebiet G. Dann ist $f(G)$ wieder ein Gebiet.*

Diese Eigenschaft holomorpher Funktionen heißt *Gebietstreue*.

Satz 22.16 (Maximumprinzip) *Sei G ein Gebiet und f eine auf G holomorphe Funktion, die in G ein lokales Maximum ihres Absolutbetrages annimmt. Dann ist f konstant auf G.*

Beweis Sei $c \in G$ und $U \subseteq G$ eine Umgebung von c mit $|f(z)| \leq |f(c)|$ für alle $z \in U$. Dann ist $f(U) \subseteq \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq |f(z)|\}$, d.h. $f(U)$ ist keine offene Umgebung von $f(z)$. Nach dem Offenheitssatz ist f konstant. ∎



Folgerung 22.17 (Maximumprinzip für beschränkte Gebiete) *Sei G ein beschränktes Gebiet und f eine auf $\overline{G}$ stetige und in G holomorphe nichtkonstante Funktion. Dann nimmt f sein Maximum* nur *auf dem Rand von G an:*

$$|f(z_0)| < \max_{z\in\partial G} |f(z)| \quad \textit{für } z_0 \in G.$$

Der Beweis ist klar: Als stetige Funktion muss $|f|$ auf $\overline{G}$ das Maximum annehmen. Lokale Maxima in G gibt es jedoch nicht, da f nicht konstant ist. ■

Beispiel 10 Wir suchen $\max_{|z|\le 1} |1-z^2|$. Da die Funktion $f(z) = 1-z^2$ auf $\mathbb{C}$ holomorph ist, muss das gesuchte Maximum auf dem Rand der Einheitskreisscheibe zu finden sein. Mit $z = z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, erhält man

$$\left|1 - z(t)^2\right|^2 = \left|1 - e^{i2t}\right|^2 = (1 - \cos 2t)^2 + (\sin 2t)^2 = 2(1 - \cos 2t).$$

Dieser Ausdruck wird maximal für $\cos 2t = -1$, also für $t = \frac{\pi}{2}$ und $t = \frac{3\pi}{2}$. Also ist

$$\max_{|z|\le 1} |1 - z^2| = \sqrt{2\big(1 - (-1)\big)} = 2,$$

und das Maximum wird an den Stellen $z_1 = e^{i\pi/2}$ und $z_2 = e^{3i\pi/2}$ angenommen. ■

Anwendung des Maximumprinzips auf $1/f$ liefert schließlich

Satz 22.18 (Minimumprinzip) *Sei f holomorph im Gebiet G, und $|f|$ besitze in G ein lokales Minimum, d.h. es gebe ein $c \in G$ und eine offene Umgebung $U \subseteq G$ von c mit $|f(c)| = \inf_{z\in U} |f(z)|$. Dann ist $f(c) = 0$, oder f ist konstant in G.*

Deutet man die reelle Zahl $|f(z)|$ als Höhe in Punkt $z \in G$, so erhält man über $G \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ die Fläche im $\mathbb{R}^3$, die man gelegentlich die *„analytische Landschaft“* von f nennt. Das Maximumprinzip läßt sich dann wie folgt aussprechen:

In der analytischen Landschaft einer holomorphen Funktion gibt es keine echten Gipfel.