

21 Komplexe Differentiation

Wir wenden uns nun der (komplexen) Funktionentheorie zu und beschäftigen uns mit komplexwertigen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Solche Funktionen lassen sich ebenfalls differenzieren und integrieren. Man gewinnt dabei überraschende Einsichten auch in die Eigenschaften reeller Funktionen. Die moderne Funktionentheorie besticht sowohl durch ihre innere Schönheit und Eleganz als auch durch ihre vielfältigen Anwendungen, die von der Berechnung von Tragflügelströmungen bis zum Beweis des Primzahlsatzes reichen.

21.1 Die komplexe Zahlenebene

Im Abschnitt 1.3 haben wir komplexe Zahlen eingeführt als Paare $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ reeller Zahlen, die man addieren

$$(s, t) + (x, y) = (s + x, t + y)$$

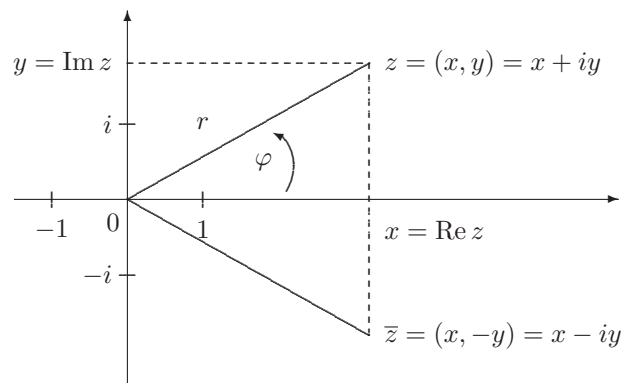
und multiplizieren

$$(s, t) \cdot (x, y) = (sx - ty, tx + sy)$$

kann. Versehen mit diesen Operationen wird die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen ein Körper. Übliche Schreibweisen der komplexen Zahl $z = (x, y)$ sind $z = x + iy$ mit $i = (0, 1)$ (imaginäre Einheit) sowie

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

wobei $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ für den Betrag und $\varphi = \arg z \in [0, 2\pi)$ für das Argument der Zahl z stehen.



Da man \mathbb{C} mit der Ebene \mathbb{R}^2 identifizieren kann und der Betrag $|z|$ der komplexen Zahl $z = (x, y)$ nichts anderes als die Euklidische Norm $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist, kann man die im zweiten Semester eingeführten Begriffe für Punktfolgen, Abbildungen usw. im \mathbb{R}^n problemlos auf \mathbb{C} übertragen. Wir erinnern an einige dieser Begriffe.

- Für $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt

$$U_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

die r -Umgebung von z_0 . Diese stellt eine Kreisscheibe vom Radius r und mit Mittelpunkt z_0 ohne ihren Rand dar. Die Begriffe innerer Punkt, Häufungspunkt, Randpunkt sowie offene Menge, abgeschlossene Menge, kompakte Menge, Rand und auch Inneres und Abschließung einer Menge definieren wir wie in Abschnitt 13.1.

- Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ein *Weg*, und

$$\Gamma := \{\gamma(t) \in \mathbb{C} : t \in [a, b]\}$$

heißt die zugehörige *Kurve*. Einen Weg in \mathbb{C} kann man darstellen als $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ mit reellwertigen Funktionen $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Der Weg γ heißt *stetig differenzierbar*, wenn x, y stetig differenzierbare Funktionen sind. Wir wollen γ *glatt* nennen, wenn zusätzlich noch $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 \neq 0$ (oder $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq 0$) für alle $t \in [a, b]$ ist. Weitere Begriffe wie Anfangs- und Endpunkt, geschlossene Wege, doppeltpunktfreie Wege, Parametrisierungen u.s.w. finden Sie in Abschnitt 14.1.

- Eine Teilmenge M von \mathbb{C} heißt *wegzusammenhängend*, wenn zu je zwei Punkten $m_1, m_2 \in M$ ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ existiert, der z_1 mit z_2 verbindet und der ganz in M verläuft. Eine offene wegzusammenhängende Menge heißt ein *Gebiet*.
- Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt *konvergent*, wenn es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_n| \rightarrow 0$ gibt. Wir schreiben dann

$$\lim z_n = z \quad \text{oder} \quad z_n \rightarrow z \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Es gelten das Cauchy Kriterium und die Rechenregeln wie im Reellen.

- Sei $(z_n)_{n \geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt die Folge $(s_n)_{n \geq 0}$ der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n s_k = s_0 + s_1 + \dots + s_n$$

eine unendliche *Reihe*, die wir mit $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ bezeichnen. Konvergiert die Folge der Partialsummen gegen $s \in \mathbb{C}$, so schreiben wir $s = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$, und wir nennen die Reihe *konvergent* und s die *Summe* der Reihe. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergiert. Absolut konvergente Reihen sind konvergent. Zum Nachweis der absoluten Konvergenz stehen die aus Abschnitt 2.4 bekannten Kriterien (Majorantenkriterium, Wurzelkriterium und Quotientenkriterium) zur Verfügung.

Das *Cauchyprodukt* der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Diese Reihe konvergiert absolut, wenn die Ausgangsreihen absolut konvergieren.

- Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen, und seien $z, z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt die komplexe Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

eine *Potenzreihe* mit Entwicklungspunkt z_0 , und die Zahlen a_n heißen die *Koeffizienten* der Potenzreihe. Für jede Potenzreihe gibt es ein $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$, den *Konvergenzradius* der Reihe, so dass die Reihe für $|z - z_0| < R$ konvergiert und für $|z - z_0| > R$ divergiert. Für Punkte z mit $|z - z_0| = R$ läßt sich ohne weiteres keine Aussage treffen. Zu komplexen Potenzreihen gehört also eine offene Kreisscheibe, auf der sie konvergieren. Der Konvergenzradius berechnet sich aus

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{oder} \quad R = \left(\lim \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1},$$

falls diese Grenzwerte existieren. Im allgemeinen Fall ist

$$R = \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}.$$

Beispiel Für die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2-i}{5} \right)^n (z+i-1)^n \tag{21.1}$$

mit dem Entwicklungspunkt $z_0 = 1 - i$ ist $a_n = \left(\frac{2-i}{5} \right)^n$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2-i}{5} \right|^n} = \left| \frac{2-i}{5} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Also ist die Reihe (21.1) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+i-1| < \frac{1}{\sqrt{5}}$ konvergent und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+i-1| > \frac{1}{\sqrt{5}}$ divergent. Für die Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+i-1| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ können wir ohne weitere Untersuchung keine Aussage treffen. ■

21.2 Komplexe Funktionen

Eine komplexe Funktion f ist auf einer nichtleeren Teilmenge D von \mathbb{C} definiert und ordnet jedem Punkt $z \in D$ eine komplexe Zahl $f(z)$ zu. Stellen wir z und $f(z)$ durch Real- und Imaginärteil in der Form

$$z = x + iy, \quad f(z) = u + iv$$

dar, so können wir u und v als reellwertige Funktionen der zwei reellen Veränderlichen x, y auffassen:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Die Funktion u und v heißen der *Real-* und der *Imaginärteil* von f .

Beispiele Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ bildet $z = x + iy$ auf

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

ab. Also ist

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ bildet $z = x + iy$ auf

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

ab. Also ist

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

■

Die graphische Veranschaulichung komplexer Funktionen ist schwieriger als die reeller Funktionen, da der Graph eine Teilmenge von $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^4$ ist. Oft begnügt man sich damit, eine Ebene für den Definitionsbereich und eine für den Wertebereich zu zeichnen und durch geeignete Markierungen zu verdeutlichen, welche Punkte der einen Ebene durch die Funktion den Punkten der anderen Ebene zugeordnet werden.

Grenzwerte und Stetigkeit komplexer Funktionen erklären wir wie früher.

Definition 21.1 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, und z_0 sei ein Häufungspunkt von D . Wenn für jede Folge $(z_n)_{n \geq 1}$ von Punkten in D mit $\lim z_n = z_0$ die Folge $(f(z_n))_{n \geq 1}$ der Funktionswerte gegen ein- und dieselbe komplexe Zahl g konvergiert, so heißt g der Grenzwert von f für $z \rightarrow z_0$. Man schreibt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = g \quad \text{oder} \quad f(z) \rightarrow g \quad \text{für } z \rightarrow z_0.$$

Ist $z_0 \in D$ und gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, so heißt f stetig an der Stelle x_0 .

Für den Umgang mit Grenzwerten komplexer Funktionen gelten die gleichen Regeln wie im Reellen (Abschnitt 3.3). Auch sind Summe, Produkt und Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig. Der Quotient zweier stetiger Funktionen ist in allen Punkten stetig, wo er definiert ist, d.h. wo die Nennerfunktion ungleich 0 ist.

Eine wichtige Klasse stetiger Funktionen wird durch Potenzreihen beschrieben.

Satz 21.2 Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die durch $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ definierte Funktion stetig auf der offenen Kreisscheibe

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$

Wir sehen uns einige weitere Beispiele komplexer Funktionen an.

Die Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z + c$ mit $c \in \mathbb{C}$ heißen *Translationen*, da sie eine Verschiebung (Translation) der komplexen Ebene um c bewirken. Translationen sind stetig und bijektiv.

Die Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto az$ mit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ heißen *Drehstreckungen*. Ist nämlich $a = re^{i\varphi}$, so hat der Bildpunkt von z den Betrag $r|z|$ (Streckung um den Faktor $r > 0$) und das Argument $\varphi + \arg z$ (Drehung um den Winkel φ). Auch Drehstreckungen sind stetig und bijektiv.

Eine Funktion der Gestalt $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ heißt *Polynom*. Polynome sind stetig auf \mathbb{C} . Quotienten zweier Polynome f, g mit $g \not\equiv 0$ heißen *rationale Funktionen*. Diese sind überall dort definiert und stetig, wo das Nennerpolynom g keine Nullstelle hat.

Ausführlicher sehen wir uns die Exponentialfunktion an. Wir definieren sie im Komplexen durch

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (21.2)$$

Die absolute Konvergenz dieser Reihe auf ganz \mathbb{C} haben wir bereits in Abschnitt 2.4 festgestellt. Nach Satz 21.2 ist die Exponentialfunktion auf ganz \mathbb{C} stetig. Für $z = x \in \mathbb{R}$ ist $e^z = e^x$, d.h. wir erhalten die in 3.4 eingeführte reelle Exponentialfunktion. Für $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$ wird wegen

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, 4, 8, 12, 16, \dots \\ i & \text{für } n = 1, 5, 9, 13, 17, \dots \\ -1 & \text{für } n = 2, 6, 10, 14, 18, \dots \\ -i & \text{für } n = 3, 7, 11, 15, 19, \dots \end{cases}$$

und

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{y^n}{n!} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots \right)$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (21.3)$$

In Abschnitt 1.3 haben wir diese Schreibweise rein formal eingeführt. Wie im Reellen kann man nachrechnen, dass

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (21.4)$$

Damit ergibt sich für $z = x + iy$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Exponentialfunktion sind also gegeben durch

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{und} \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Damit ist auch eine weitere Eigenschaft der komplexen Exponentialfunktion klar: Sie ist $2\pi i$ -periodisch, d.h.

$$e^z = e^{z+2\pi i} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Die Exponentialfunktion im Komplexen ist also *nicht* injektiv. Sie wird injektiv, wenn wir sie (z.B.) nur auf dem *Streifen*

$$S := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im } z \leq \pi\}$$

betrachten. Die Bildmenge der komplexen Exponentialfunktion ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (der Punkt 0 wird wegen $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$ nicht angenommen). Jeder Funktionswert wird dabei wegen der Periodizität unendlich oft angenommen. Die Einschränkung

$$\exp : S \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

der Exponentialfunktion ist eine Bijektion. Ihre Umkehrabbildung

$$\text{Ln} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S$$

heißt *komplexe Logarithmusfunktion* (genauer: der Hauptwert des komplexen Logarithmus). Ihre Funktionswerte kann man einfach über die Polarkoordinatendarstellung berechnen: Ist $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$, so ist

$$\text{Ln } z = \text{Ln}(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$$

mit der reellen Logarithmusfunktion \ln . Die komplexe Logarithmusfunktion ist unstetig in allen Punkten der negativen Halbachse. Es gilt nämlich für jedes $r > 0$ und für $n \rightarrow \infty$

$$re^{i(-\pi+\frac{1}{n})} \rightarrow -r \quad \text{und} \quad re^{i(\pi-\frac{1}{n})} \rightarrow -r,$$

aber

$$\operatorname{Ln}(re^{i(-\pi+\frac{1}{n})}) \rightarrow \ln r - \pi i \quad \text{und} \quad \operatorname{Ln}(re^{i(\pi-\frac{1}{n})}) \rightarrow \ln r + \pi i.$$

Nur der zweite Grenzwert ist der Funktionswert an der Stelle $-r$. In allen übrigen Punkten der Definitionsmenge, also in der entlang der negativen Achse geschlitzten komplexen Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ist die komplexe Logarithmusfunktion stetig.

Die *komplexen trigonometrischen Funktionen* werden durch die auf ganz \mathbb{C} konvergenten Potenzreihen

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

definiert. Man rechnet leicht nach, dass

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{21.5}$$

und

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{sowie} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktionen sind also eng miteinander verwandt. Aus (21.4) und (21.5) folgen auch leicht die üblichen Additionstheoreme für die Sinus- und Kosinusfunktion. Schließlich ist für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

(Nachrechnen!), so dass der Real- und der Imaginärteil der Sinusfunktion gleich

$$u(x, y) = \sin x \cosh y, \quad v(x, y) = \cos x \sinh y$$

sind.

Analog ist

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Sinus- und Kosinusfunktion sind auf ganz \mathbb{C} stetig. Schließlich erklären wir die *komplexen Hyperbelfunktionen* durch

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Beide Funktionen sind auf \mathbb{C} stetig.

21.3 Differentiation im Komplexen

Die folgende Definition ist der Definition der Differenzierbarkeit im Reellen nachgebildet. Wie wir bald sehen werden, ist die komplexe Differenzierbarkeit eine wesentlich stärkere Eigenschaft als die reelle Differenzierbarkeit mit z.T. verblüffenden Konsequenzen.

Definition 21.3 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ und z_0 ein innerer Punkt von D . Wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (21.6)$$

existiert, so heißt f an der Stelle z_0 differenzierbar, und der Grenzwert (21.6) heißt die Ableitung von f an der Stelle z_0 und wird mit $f'(z_0)$ bezeichnet. Ist D offen und f in jedem Punkt von D differenzierbar, so heißt f holomorph auf D .

Statt holomorph sind auch die Bezeichnungen *regulär* und *analytisch* gebräuchlich. Für holomorphe Funktionen gelten die aus dem Reellen bekannten Regeln über die Differenzierbarkeit von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten (vgl. Abschnitt 4.2) ebenso unverändert weiter wie die Kettenregel.

Beispiele Seien $a, b \in \mathbb{C}$. Die lineare Funktion $f(z) = az + b$ ist auf \mathbb{C} holomorph, und es ist für $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(az + b) - (az_0 + b)}{z - z_0} = a.$$

Ebenso leicht sieht man, dass alle Polynome $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ auf ganz \mathbb{C} holomorph sind und dass wie gewohnt gilt

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + \dots + 2 a_2 z + a_1.$$

Dagegen ist die Funktion $f(z) = \bar{z}$ in *keinem* Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Es ist nämlich sowohl $z_0 + \frac{1}{n} \rightarrow z_0$ als auch $z_0 + \frac{i}{n} \rightarrow z_0$ für $n \rightarrow \infty$, jedoch

$$\frac{\overline{z_0 + \frac{1}{n} - z_0}}{z_0 + \frac{1}{n} - z_0} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\overline{z_0 + \frac{i}{n} - z_0}}{z_0 + \frac{i}{n} - z_0} = \frac{-\frac{i}{n}}{\frac{i}{n}} = -1.$$

■

Der folgende Satz garantiert die komplexe Differenzierbarkeit vieler wichtiger Funktionen.

Satz 21.4 Die komplexe Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ habe den Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die durch $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ definierte Funktion auf der offenen Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ holomorph, und ihre Ableitung ist gleich

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Diese „abgeleitete“ Potenzreihe hat wieder den Konvergenzradius R .

Man darf Potenzreihen also gliedweise komplex differenzieren. Satz 21.4 liefert die Holomorphie der komplexen Exponential-, Sinus- und Kosinusfunktion auf ganz \mathbb{C} . Dabei ist

$$\begin{aligned}(\exp z)' &= \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)' = 1 + 2\frac{z}{2!} + 3\frac{z^2}{3!} + \dots = \exp z, \\(\sin z)' &= \left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right)' = 1 - 3\frac{z^2}{3!} + 5\frac{z^4}{5!} - \dots = \cos z\end{aligned}$$

und analog $(\cos z)' = -\sin z$. Auch die Hyperbelfunktionen sind auf \mathbb{C} holomorph, und es ist

$$(\sinh z)' = \cosh z \quad \text{sowie} \quad (\cosh z)' = \sinh z.$$

Sei wieder $z = x + iy$ und $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Wir stellen nun einen Zusammenhang her zwischen der komplexen Differenzierbarkeit von f in $z_0 = x_0 + iy_0$ und der (reellen) Differenzierbarkeit von u und v in (x_0, y_0) .

Satz 21.5 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$.

- (a) Ist f in $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ komplex differenzierbar, so sind u und v in (x_0, y_0) partiell differenzierbar, und es ist

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \quad (21.7)$$

- (b) Sind u und v auf D stetig partiell differenzierbar und gelten dort die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad (21.8)$$

so ist f auf D holomorph, und in $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ gilt

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = -i(u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)). \quad (21.9)$$

Beweis von Aussage (a) Sei f in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar, d.h. der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

soll existieren. Lassen wir h entlang der reellen Achse gegen 0 streben, d.h. wählen wir $h = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so folgt

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) + iv(x_0 + t, y_0) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \\&= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)\end{aligned}$$

(man beachte, dass eine Folge in \mathbb{C} genau dann konvergiert, wenn die Folgen ihrer Real- und Imaginärteile in \mathbb{R} konvergieren). Lassen wir dagegen h entlang der imaginären Achse gegen 0 streben, d.h. wählen wir $h = it$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so folgt analog

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{it} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) + iv(x_0, y_0 + t) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{it} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{t} + i \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)}{t} \right) \\ &= \frac{1}{i} (u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil in den beiden erhaltenen Ausdrücken für $f'(z_0)$ liefert (21.7). ■

Beispiel 1 Die Funktion $f(z) = |z|^2$ hat den Realteil $u(x, y) = x^2 + y^2$ und den Imaginärteil $v(x, y) = 0$. Beide Funktionen sind auf \mathbb{R}^2 stetig partiell differenzierbar mit den Ableitungen

$$u_x(x, y) = 2x, \quad u_y(x, y) = 2y, \quad v_x(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad v_y(x, y) = 0.$$

Komplexe Differenzierbarkeit von f kann daher höchstens im Punkt $z_0 = 0$ vorliegen, da nur dort die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind. Wegen

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{z\bar{z}}{z} = \bar{z} \rightarrow 0$$

ist in diesem Punkt f tatsächlich komplex differenzierbar, und $f'(0) = 0$. Ebenso einfach zeigt man, dass die Funktionen $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$ und $z \mapsto \bar{z}$ nirgendwo komplex differenzierbar sind.

Beispiel 2 Wir betrachten die komplexe Logarithmusfunktion $\operatorname{Ln} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$, die den Punkt $z = r e^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$ in $\ln r + i\varphi$ überführt. Real- und Imaginärteil dieser Funktion sind für $x > 0$

$$u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad \text{und} \quad v(x, y) = \arctan \frac{y}{x}.$$

Diese Funktionen haben für $x > 0$ die partiellen Ableitungen

$$u_x(x, y) = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

sowie

$$v_x(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad v_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Nach Satz 21.5 (b) ist die komplexe Logarithmusfunktion holomorph in der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = x > 0\}$, und ihre Ableitung ist dort

$$\operatorname{Ln}'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}.$$

Mit mehr Aufwand kann man zeigen, dass die Funktion Ln sogar in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ holomorph ist und dass ihre Ableitung gleich $\operatorname{Ln}'(z) = \frac{1}{z}$ ist. ■

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen liefern eine sehr einschränkende Bedingung dafür, wann eine (reell) differenzierbare Funktion u der Realteil einer holomorphen Funktion ist.

Satz 21.6 *Sei D offen und $f = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$ in D holomorph. Sind die Funktionen u und v zweimal stetig partiell differenzierbar auf D , so gilt*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{und} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0. \quad (21.10)$$

Beweis Aus der Holomorphie von f folgt $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Erneutes Ableiten ergibt $u_{xx} = v_{yx}$, $u_{xy} = v_{yy}$, $u_{yx} = -v_{xx}$ und $u_{yy} = -v_{xy}$. Daher ist $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy}$ sowie $v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy}$. Nach dem Satz von Schwarz (Satz 13.11) ist aber $v_{xy} = v_{yx}$ und $u_{xy} = u_{yx}$ so dass (21.10) unmittelbar folgt. ■

Wir werden später sehen, dass die geforderten Differenzierbarkeitseigenschaften von u und v überflüssig sind, da sie bereits aus der Holomorphie von f folgen. Mit Hilfe des Laplaceoperators $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ können wir (21.10) auch schreiben als

$$\Delta u = 0 \quad \text{und} \quad \Delta v = 0.$$

Die Gleichung $\Delta u = 0$ heißt *Laplacesche Differentialgleichung* oder *Potentialgleichung*, und ihre Lösungen heißen *harmonische Funktionen*.

Folgerung 21.7 *Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind harmonische Funktionen.*

21.4 Konforme Abbildungen

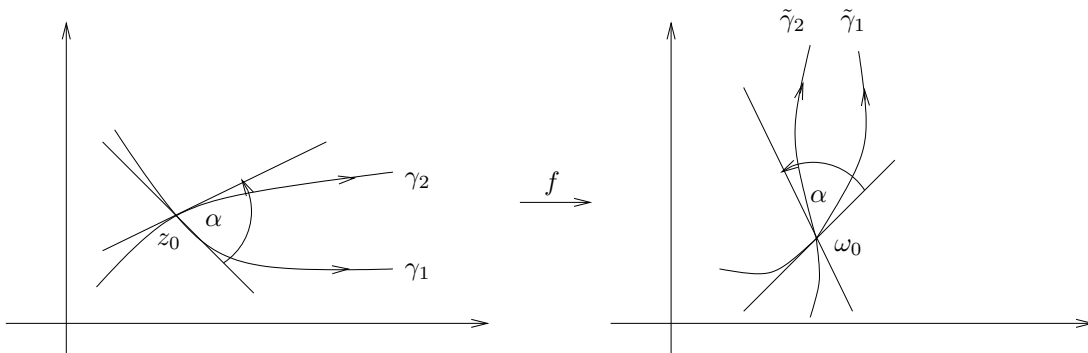
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in D$ sei ein Punkt mit $f'(z_0) \neq 0$. Wir betrachten einen glatten Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow D$, der durch z_0 verläuft. Sei etwa $z_0 = \gamma(t_0)$ mit einem $t_0 \in (a, b)$. Dann schließt die Tangente an γ im Punkt z_0 mit der positiven reellen Achse den Winkel $\varphi = \arg \dot{\gamma}(t_0)$ ein (für $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ ist $\dot{\gamma} = (\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2)$ der Tangentenvektor). Durch f wird der Weg γ in den Weg

$$\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(\gamma(t))$$

überführt. Er führt durch den Punkt $w_0 = f(z_0) = f(\gamma(t_0)) = \tilde{\gamma}(t_0)$. Der Weg $\tilde{\gamma}$ ist ebenfalls glatt. Die Tangente an $\tilde{\gamma}$ im Punkt w_0 schließt mit der positiven reellen Achse den Winkel

$$\begin{aligned} \arg \dot{\tilde{\gamma}}(t_0) &= \arg \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=t_0} = \arg (f'(\gamma(t_0)) \cdot \dot{\gamma}(t_0)) \\ &= \arg f'(z_0) + \varphi \end{aligned}$$

ein. Durch die Abbildung f wird also der Weg γ lokal (nahe bei z_0) um den Winkel $\arg f'(z_0)$ gedreht. Dies gilt für alle glatten Wege durch z_0 . All diese Wege werden lokal um den gleichen Winkel $\arg f'(z_0)$ gedreht. Schneiden sich also zwei glatte Wege γ_1, γ_2 in z_0 , so bleibt ihr Schnittwinkel nach Überführung in die Wege $\tilde{\gamma}_1 = f \circ \gamma_1$ und $\tilde{\gamma}_2 = f \circ \gamma_2$ erhalten. Diese Eigenschaft heißt *Winkeltreue* der Abbildung f im Punkt z_0 .



Wir betrachten nun eine Folge $(z_n)_{n \geq 1}$ mit $z_n \rightarrow z_0$, die in D liegt. Dann konvergiert die Folge der Bildpunkte $w_n := f(z_n)$ gegen $w_0 := f(z_0)$. Die Abstände $|z_n - z_0|$ und $|w_n - w_0|$ konvergieren also gegen 0, und die Quotienten $|w_n - w_0|/|z_n - z_0|$ kann man als Verzerrungsfaktoren für die Abbildung f in der Nähe von z_0 betrachten. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_n - w_0|}{|z_n - z_0|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} \right| = |f'(z_0)|$$

sind diese Verzerrungsfaktoren für große n (d.h. wenn z_n nahe bei z_0 liegt) näherungsweise gleich $|f'(z_0)|$ und damit unabhängig von der speziell gewählten Folge (z_n) . Die Verzerrung durch die Abbildung f ist also unabhängig von der Richtung. Man sagt daher, dass f lokal (nahe bei z_0) *maßstabstreu* ist. Eine in z_0 lokal maßstabstreu und winkeltreue Abbildung heißt *konform* in z_0 .

Satz 21.8 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann vermittelt f in jedem Punkt $z_0 \in D$ mit $f'(z_0) \neq 0$ eine konforme Abbildung.

Wie die komplexe Exponentialfunktion zeigt, kann man durch konforme Abbildungen z.B. Rechtecke auf Kreissegmente oder Streifen auf die geschlitzte kom-

plexe Ebene abbilden. Es ist erstaunlich, dass es mit geeigneten konformen Abbildungen gelingt, sehr unregelmäßige Gebiete auf einfache Gebiete (wie eine offene Kreisscheibe) abzubilden.

Definition 21.9 Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängend, wenn mit jeder ganz in D verlaufenden geschlossenen doppelpunktfreien Kurve auch deren Innengebiet zu D gehört.

Beispielsweise ist ein offener Kreisring zwar wegzusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend. Anschaulich bedeutet der einfache Zusammenhang eines Gebietes, dass dieses keine Löcher hat. Die in der Definition 21.9 benutzte Tatsache, dass jede geschlossene und doppelpunktfreie Kurve die Ebene in zwei Teile (das Äußere und das Innere der Kurve) zerlegt, scheint auch anschaulich klar zu sein. Der Beweis dieser Tatsache ist aber ziemlich schwierig (Jordan-scher Kurvensatz). Auch der Beweis des folgenden bemerkenswerten Satzes ist zu schwierig, um ihn hier andeuten zu können.

Satz 21.10 (Riemannscher Abbildungssatz) Seien M und M' einfach zusammenhängende Gebiete, die beide echte Teilmengen von \mathbb{C} sind. Dann gibt es eine bijektive konforme Abbildung von M auf M' .

Wir vermerken in diesem Zusammenhang lediglich eine weitere Eigenschaft holomorpher Funktionen, ihre lokale Umkehrbarkeit.

Satz 21.11 Sei D offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in D$ und $f'(z_0) \neq 0$. Dann ist f in einer Umgebung von z_0 injektiv.

Zur Illustration des Riemannschen Abbildungssatzes betrachten wir eine Familie besonders einfacher holomorpher Funktionen.

Definition 21.12 Seien a, b, c, d komplexe Zahlen mit $ad - bc \neq 0$. Dann heißt die für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $cz + d \neq 0$ durch

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (21.11)$$

definierte Funktion gebrochen linear (oder eine Möbiustransformation).

Gilt $cz + d = 0$, so ist $f(z)$ in (21.11) nicht definiert. In diesem Fall legen wir fest, dass $f(z) = \infty$. Andererseits definieren wir $f(\infty) = a/c$ falls $c \neq 0$ und $f(\infty) = \infty$ falls $c = 0$. Durch diese Ergänzungen des Definitions- und Wertebereichs von f wird die komplexe Ebene \mathbb{C} um einen Punkt ∞ erweitert, den wir den *unendlich fernen Punkt* nennen. Wir verwenden für die erweiterte komplexe Ebene $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ das Symbol $\overline{\mathbb{C}}$.

Eine gebrochen lineare Funktion vermittelt eine bijektive Abbildung von $\overline{\mathbb{C}}$ auf $\overline{\mathbb{C}}$. Zu gegebenem w hat nämlich die Gleichung

$$\frac{az + b}{cz + d} = w$$

die eindeutige Lösung

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

mit $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$. Man rechnet auch leicht nach (HA), dass die Hintereinanderausführung zweier gebrochen linearer Abbildungen wieder eine gebrochen lineare Abbildung ergibt.

Die einfachsten gebrochen linearen Abbildungen sind

$$\begin{aligned} z &\mapsto z + c && \text{mit } c \in \mathbb{C} && \text{(Translation),} \\ z &\mapsto az && \text{mit } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} && \text{(Drehstreckung) und} \\ z &\mapsto z^{-1} && && \text{(Inversion).} \end{aligned}$$

Wie die Identitäten

$$\frac{az + b}{cz + d} = \begin{cases} -\frac{ad-bc}{c}(cz + d)^{-1} + \frac{a}{c} & \text{falls } c \neq 0 \\ \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} & \text{falls } c = 0 \end{cases}$$

zeigen, kann man jede gebrochen lineare Abbildung als Hintereinanderausführung der drei genannten einfachsten gebrochen linearen Abbildungen realisieren.

Formal wird eine gebrochen lineare Abbildung durch vier Parameter (a, b, c, d) beschrieben. Da man im Bruch $\frac{az+b}{cz+d}$ aber beliebig kürzen oder erweitern kann ohne etwas an der Funktion $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ zu ändern, kann man z.B. zusätzlich fordern, dass $ad - bc = 1$. Deshalb ist die Angabe der Bilder dreier verschiedener Punkte zur Festlegung einer gebrochen linearen Funktion ausreichend.

Satz 21.13 Seien z_1, z_2, z_3 drei paarweise verschiedene Punkte aus $\overline{\mathbb{C}}$ und w_1, w_2, w_3 drei weitere paarweise verschiedene Punkte aus $\overline{\mathbb{C}}$. Dann gibt es genau eine gebrochen lineare Funktion $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ mit $f(z_k) = w_k$ für $k = 1, 2, 3$. Man erhält sie durch Auflösen der Gleichung

$$\frac{f(z) - w_1}{f(z) - w_2} \bigg/ \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \bigg/ \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad (21.12)$$

nach $f(z)$.

Den Quotienten auf der rechten Seite von (21.12) nennt man das *Doppelverhältnis* von z, z_1, z_2, z_3 . Ist etwa $w_k = \infty$, so sind in (21.12) der Zähler und der Nenner, in denen w_k vorkommt, durch 1 zu ersetzen. Entsprechend ist zu verfahren, wenn eines der z_k gleich ∞ ist.

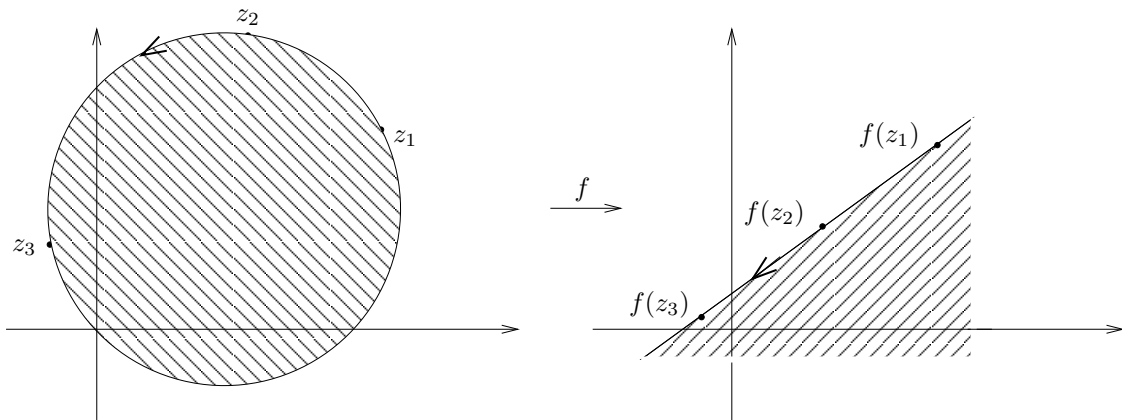
Durch drei verschiedene Punkte der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen, geht genau ein Kreis (der Umkreis des entsprechenden Dreiecks). Liegen die drei Punkte dagegen auf einer Geraden, so verläuft genau eine Gerade durch diese Punkte. Wir interpretieren nun Geraden als *Kreise durch den unendliche fernen Punkt*. Dann ist durch drei verschiedene Punkte der erweiterten Zahlenebene immer genau ein Kreis bestimmt.

Satz 21.14 Seien z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 jeweils drei paarweise verschiedene Punkte aus $\overline{\mathbb{C}}$ und f sei eine gebrochen lineare Abbildung mit $f(z_k) = w_k$ für $k = 1, 2, 3$. Dann bildet f den Kreis durch z_1, z_2, z_3 auf den Kreis durch w_1, w_2, w_3 ab. Durchläuft man den ersten Kreis von z_1 über z_2 nach z_3 und bezeichnet man mit D_l das Teilgebiet von \mathbb{C} , das dabei zur Linken liegt, so wird D_l durch f auf das Teilgebiet von \mathbb{C} abgebildet, das beim Durchlaufen des Bildkreises von w_1 über w_2 nach w_3 zur Linken liegt. Entsprechendes gilt für die zur Rechten liegenden Teilgebiete.

Eine Abbildung, die Kreise in Kreise überführt, heißt auch *kreistreu*. Neben den gebrochen linearen Abbildungen haben nur noch die Abbildungen

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

diese Eigenschaft (Satz von Caratheodory).



Beispiel 3 Wir suchen die gebrochen lineare Funktion, die die Punkte $z_1 = i, z_2 = 1$ und $z_3 = -2$ auf $w_1 = 0, w_2 = 3$ und $w_3 = i$ abbildet. Nach Satz 21.13 ist

$$\frac{f(z) - 0}{f(z) - 3} \Big/ \frac{i - 0}{i - 3} = \frac{z - i}{z - 1} \Big/ \frac{-2 - i}{-2 - 1}.$$

Umstellen nach $f(z)$ ergibt

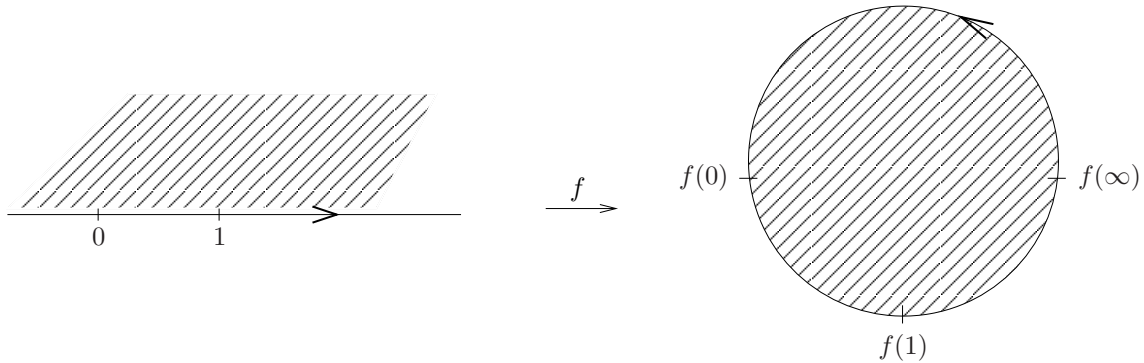
$$f(z) = \frac{9z - 9i}{(4 - 7i)z - 1 + 4i}.$$

Dabei wird das Äußere des Kreises durch z_1, z_2, z_3 auf das Innere des Kreises durch w_1, w_2, w_3 abgebildet.

Beispiel 4 Wir suchen eine gebrochen lineare Abbildung, die die reelle Achse auf die Einheitskreislinie abbildet und dabei die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$

auf das Innere des Einheitskreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ abbildet. Dazu wählen wir z.B.

$$f(0) = -1, \quad f(1) = -i, \quad f(\infty) = 1. \quad (21.13)$$



Wir bestimmen f wieder mit Satz 21.13 oder aus dem Ansatz $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Einsetzen der Bedingungen (21.13) liefert

$$\frac{b}{d} = -1, \quad \frac{a+b}{c+d} = -i, \quad \frac{a}{c} = 1.$$

Also ist $b = -d$ und $a = c$. Eingesetzt in die zweite Gleichung erhält man $\frac{a-d}{a+d} = i$, woraus $d = ia$ folgt. Also ist

$$f(z) = \frac{az - ia}{az + ia} = \frac{z - i}{z + i}.$$

Man kann zeigen, dass jede gebrochen lineare Abbildung, die die reelle Achse auf die Einheitskreislinie abbildet und die obere Halbebene in das Innere des Einheitskreises überführt, von folgender Gestalt ist:

$$f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - p}{z - \bar{p}} \quad \text{mit } \varphi \in \mathbb{R} \text{ und } \operatorname{Im} p > 0.$$

$$\int_{\partial B} \frac{1}{z - c} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t) - c} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \quad \blacksquare$$